

Die Regulierung hoher Temperaturen

Von M. Russenberger und H. Lustenberger, Schaffhausen

Die Temperatur eines elektrischen Ofens wird durch Dosierung der zugeführten elektrischen Leistung reguliert. Dies kann entweder erfolgen, indem der Ofen in mehr oder weniger langen Intervallen ein- oder ausgeschaltet wird, wobei die Temperatur um so höher ist, je länger der Ofen im Mittel eingeschaltet bleibt und umgekehrt. Dieses Verfahren wird kurz als „Ein-Aus“-Methode bezeichnet. Im andern Fall wird eine kontinuierliche Spannung an den Ofen gelegt, deren Größe sich nach der verlangten Temperatur richtet. Es ist hier bereits ein Regulierorgan, im einfachsten Fall ein Regulierwiderstand, notwendig. Die Verstellung dieses Regulierorgans erfolgt ungefähr proportional einer bestimmten zugelassenen Temperaturabweichung. Diese Art von Regulierung ist deshalb unter dem Namen „Proportional-Regulierung“ bekannt geworden.

In beiden Fällen sind Organe zur Feststellung der Temperatur und Einleiten des Schaltvorganges notwendig. Die einfachsten Geräte sind die sogenannten Thermostaten, wie sie beispielsweise in jedem Boiler verwendet werden. Es wird hier das dilatometrische Prinzip angewandt, indem die Ausdehnung zweier verschiedener Materialien bei Erwärmung zur Betätigung eines elektrischen Kontaktes benutzt wird. Solche Thermostaten eignen sich sehr gut zur Regulierung von Temperaturen bis etwa 400° C. Die Ansprechempfindlichkeiten liegen zwischen $\pm 1/8$ bis $\pm 1^\circ$ C. Diese Thermostaten werden als handliche Apparate von den Firmen Landis & Gyr (Zür), Sauter (Basel), Saia (Bern) und anderen auf den Markt gebracht.

Bei der Regulierung höherer Temperaturen bis etwa 1000° C wird vor allem das pyrometrische Prinzip verwendet. Hierfür werden Thermoelemente benutzt, welche bei Erwärmung

eine Thermospannung, in der Größenordnung von 10 bis 50 mV für 1000° C, erzeugen. Diese Thermospannung wird dann einem Millivoltmeter mit Kontaktanordnung oder einem Galvanometer mit Servomechanismus für den Schaltvorgang zugeführt. Die ersten Instrumente werden als sogenannte Fallbügelregler ausgeführt, während die Galvanometerinstrumente in automatisch abgleichenden Brückenschaltungen verwendet werden. Je nach der verlangten Genauigkeit wird die eine oder andere Methode angewandt. Apparate nach dem Fallbügelssystem werden in der Schweiz unter anderem von den Firmen Trib-Täuber (Zürich), Camille Bauer (Basel) und Staub (Richterswil) hergestellt. Für die Bestimmung der Genauigkeit ist bei solchen Geräten nicht nur die Empfindlichkeit des Instrumentes selbst zu berücksichtigen, sondern auch die Bauart des zu regulierenden Objektes. Liegt nämlich zwischen der wärmeerzeugenden Quelle, beispielsweise der Heizspirale und dem Fühlerorgan, z. B. dem Thermoelement, eine wärmeträge Masse mit endlicher Wärmeleitfähigkeit, so erhält das Fühlerorgan die Temperatur der Wärmequelle stets verzögert. Dadurch wird der Ofen ständig zu spät eingeschaltet und umgekehrt wiederum zu spät eingeschaltet. Diese thermischen Verzögerungen bewirken ein unter Umständen recht erhebliches Überschreiten der vom Regler als solches verursachten Temperaturfehler. Selbst bei einem unendlich empfindlichen Regler tritt also eine bestimmte Temperaturpendelung ein, die von den thermischen Bedingungen des Ofens abhängig ist. Um diese Pendelungen auszuscheiden, muß zu Rückführungen oder zur Anwendung des Proportionalprinzips gegriffen werden, in bestimmten Fällen sogar zu einer Kombination von beiden.

Neben den bereits erwähnten Ausführungen von potentiometrischen Reglern, die zusätzliche Einrichtungen für die Proportionalregulierung aufweisen und ziemlich kompliziert sind, sind in England Proportionalregler nach dem Widerstandsthermometer-Prinzip bekannt geworden. Diese Apparate nutzen die Widerstandsänderungen von Platinspiralen aus. Sie arbeiten mit mehrstufigen Röhrenverstärkern und haben einen Temperaturbereich bis etwa 900° C bei einer Genauigkeit, nach Angaben der Hersteller, von etwa $\pm 0,2^\circ$ C. Der instrumentelle Aufwand bei solchen Geräten ist ziemlich groß, was sich selbstverständlich auch auf die wirtschaftliche Seite auswirkt.

Ein neuer Weg auf dem Gebiet der Temperaturregulatoren ist von Alfred J. Amser & Co. in Schaffhausen beschritten worden. Es handelt sich hier um einen Regler nach dem Proportionalprinzip von sehr hoher Genauigkeit und dennoch einfacher Bauart (vgl. Abb. 1). Ein Rohr (1) aus hochzähligem Material, ein Quarzstab (2) und die Stelze (3), aus demselben Material wie das Rohr (1) hergestellt, bilden den eigentlichen Temperaturfühler. Er kann in die zu regulierenden Ofen radial oder schief eingesetzt werden. Die aktive Länge wird zur Hauptsache durch die Länge des Quarzstückes (2) bestimmt und beträgt nur 60 mm. Die Abnahme der Temperatur erfolgt,

deshalb ziemlich örtlich, was gestattet, den Regler auch radial in kleine Ofen einzubauen. Bei einer Erwärmung des Fühlers dehnt sich das Rohr (1) stärker als der Quarzstab (2) entsprechend den verschiedenen Ausdehnungszahlen; die Längendifferenz wird auf einen Hebel (4) übertragen. Letzterer ist mittels eines Bandgelenks auf seinem Basisstück (6) reibungslos gelagert. Dieses Basisstück kann mittels der gezackten Mutter (7) und Ritzel (8) in vertikaler Richtung der jeweiligen Temperatur entsprechend verstellt werden, so daß der Hebel (4) stets in ungefähr horizontaler Lage steht. Die Drehung von Ritzel (8) wird gleichzeitig auf eine nicht gezeichnete Skala zur relativen Ablesung der Temperatur übertragen. Am freien Ende trägt der Hebel (4) eine dünne Blattfeder (5), auf welcher sich eine Kontaktspitze (9) aus Edelmetall befindet. Die Dehnung des Fühlers wird durch den Hebel (4) bzw. (5) etwa hundertfach vergrößert. Der Gegenkontakt wird durch eine rotierende, schief auf ihrer Antriebsachse sitzende Scheibe (10), ebenfalls aus Edelmetall, gebildet. Der Kontakt (9) berührt nun die Scheibe (10) je nach seiner vertikalen Lage auf einem mehr oder weniger langen Bogenstück (11). Um den kleinen vertikalen Bewegungen, welche der Kontakt (9) beim Durchlaufen des Bogenstückes (A-B) erfährt, folgen zu können, ist die Kontaktspitze (9) an der stark nachgiebigen Blattfeder (5) befestigt. (In der in Abb. 1 gezeichneten Darstellung wäre z. B. der Kontakt zwischen den Punkten A und B des kürzeren Bogenstückes C der Scheibe 10 geschlossen, während er auf dem übrigen Teil geöffnet bleibt.) Die Summe der Ein- und Ausschaltzeiten ist dabei, infolge der konstanten Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe, konstant. Es entspricht also jeder Lage des Hebels (4) eine bestimmte Temperatur des Fühlers und andererseits ein bestimmtes Verhältnis zwischen Ein- und Ausschaltzeit. Die weitere elektrische Schaltung ist nun derart ausgebildet, daß Berührung der Scheibe eingeschaltetem Ofenstrom entspricht und umgekehrt. Will die Ofentemperatur steigen, so wird der Berührungswinkel und somit auch die Einschaltzeit des Ofens kleiner, während beim Sinken der Temperatur der Ofenstrom länger eingeschaltet bleibt. Da die Umlaufzeit der Kontaktscheibe relativ klein ist — sie beträgt 7 sec. —, sind die Temperaturschwankungen innerhalb einer Schaltperiode verschwindend klein; der Hebel (4-5) bzw. der Kontakt (9) steht deshalb in einer genau der mittleren Temperatur des Ofens entsprechenden Gleichgewichtslage, was den Bedingungen einer Proportionalregulierung entspricht. Wie groß nun die Temperaturabweichung zwischen ständiger Berührung und ständigem Öffnen des Kontakts (9), also der sogenannte Temperaturgang ist, hängt von der mechanischen Übersetzung und vor allem von der Steigung der Taumelscheibe (10) ab. Hier erlaubt nun die angewandte elektronische Steuerung mit ihren minimalen erforderlichen Kontaktströmen die Steigung sehr klein zu halten, in der Größenordnung von $\pm 1/100$ mm. Es gelingt so ohne Mühe, den ganzen Bereich zwischen dem Berührungswinkel 0 und 1 auf 1° C zu bringen. Dadurch aber erlaubt der Regler, bei normalen Ofen- und Netzverhältnissen die Temperatur auf wenige $1/10^\circ$ C konstant zu halten. Die Empfindlichkeit bleibt über den gesamten Regulierbereich von -200 bis $+1000^\circ$ C, der von ein und demselben Regler bestrichen werden kann, konstant. Ein Einfluß der Raumtemperatur tritt bei diesem Regler nicht auf.

Der durch den Rotationskontakt zu schaltende Strom steuert ein Röhrenrelais (vgl. Abb. 2). Die Schaltung weist nur eine einzige Verstärkerstufe handelsüblicher Type auf. Die Speisung erfolgt vollständig mit Wechselstrom über Transformator (3), wobei die Röhre gleichzeitig als Verstärker und Gleichrichter arbeitet. Im Anodenkreis liegt ein Relais (2), an welches an den Klemmen (4) ein normales Schütz mit einer dem Ofen entsprechenden Leistung angeschlossen werden kann. In geöffnetem Zustand des Temperaturreglers (1) bleibt die Röhre stromlos, während bei geschlossenem Kontakt der Anodenstrom ansteigt und Relais (2) angezogen wird. Das Relais (2) besitzt zwei Arbeits- und zwei Nullstromkontakte, von welchen jeder 2 Amp./250 Volt Wechselstrom schalten kann. — Die vom Rotationskontakt im Regler zu schaltende Spannung beträgt

nur etwa 20 Volt, während der Strom die (1) von etwa 20 A besitzt. Bei ausfallendem Stromstrom oder defekter Röhre schaltet das Relais auf, abfallende Temperatur. Bei der Konstruktion dieses Relais wurde speziell darauf geachtet, mit einem Minimum an Schaltleistungen auszukommen, wodurch die Störanfälligkeit ebenfalls reduziert wird.

Bei dem neuen Regulierungsapparat für hohe Temperaturen (vgl. Abb. 3) bilden Regler und Relais je eine besondere Einheit, die durch ein Kabel miteinander verbunden werden. Sämtliche mechanische Teile inkl. des Antriebmotors für den rotierenden Kontakt sind in einem kompakten Gehäuse zusammengebaut. Der Temperaturfühler kann verschoben lang sein entsprechend dem zu regulierenden Ofen; die aktive Länge bleibt jedoch stets dieselbe. — Ein weiterer, im Reglergehäuse eingehauter, einstellbarer Hilfskontakt gestattet, die Speisespannung bei Überschreitung einer bestimmten Temperatur abzuschalten. Der Regler übernimmt also gleichzeitig die Funktionen eines Ofenwächters.

Der beschriebene Temperaturregler wurde bereits in verschiedenen Forschungslaboratorien der schweizerischen Industrie eingesetzt und hat sich dort auch im Dauerbetrieb vorzüglich bewährt (Abb. 4). Dank seiner Einfachheit und Anspruchslosigkeit an Wartung wird das Gerät für mannigfache Zwecke, sei es in technischen, chemischen oder biologischen Laboratorien usw. vorzügliche Verwendung finden.

Neue Erkenntnisse in der Theorie der Nachrichtenübertragung

Bekannt sind die geläufigen Mittel zur Nachrichtenübertragung: Telephonie, Telegraphie, Rundfunk und Fernsehen. Bekannt sind ebenfalls die verschiedenen Übertragungsarten für diese Nachrichten, wobei auffällt, daß sich immer neue Modulationsarten entwickelt haben: Frequenz-, Phasen- und Impulsmodulation. Man frage sich, welche Vorteile diese Modulationsverfahren gegenüber der bei uns gebräuchlichen Amplitudenmodulation haben, abgesehen ihrer praktischen Durchführbarkeit, und wie kompliziert diese sind. Dabei ergab sich überraschend, daß bei gleicher Signalstärke der Störpegel wesentlich höher ausfallen darf. Diese und andere Überlegungen bilden das Kernproblem der folgenden Ausführungen.

Einheiten eines Nachrichtensystems

Unter Nachrichtentheorie wird eine allgemeine, systemunabhängige Theorie der Nachrichtenübermittlung verstanden. Sie stellt das Fundament für die Planung solcher Übermittlungssysteme dar. In ihren Anfängen geht sie zurück auf die Arbeiten von Nyquist und Hartley. Die von diesen aufgestellten und im folgenden noch zu behandelnden Gesetzmäßigkeiten haben ihre Gültigkeit bis in die neueste Zeit behalten. Erst die Entwicklung neuer Modulationsarten, so der Frequenzmodulation (FM) und vor allem der Pulspulsen- (PPM) und Pulsbreitenmodulation (PCM) mit ihren hohen Frequenzbanden und niedrigen Störverhältnissen, ließen die Nyquist-Hartleysche Theorie unvollständig erscheinen. Die Erweiterung der Nachrichtentheorie ist den Arbeiten von Gabor, Wiener und vor allem von Shannon (Bell Telephone Laboratories, USA) zu verdanken.

Die Aufgabe einer Nachrichtenübermittlung ist es, eine Nachricht von einer Stelle an eine andere zu übertragen. Auf die Art der Übertragung, ob Telephonie, Telegraphie, Rundfunk oder Television, braucht zunächst nicht eingetreten zu werden. Vielmehr ist die Tatsache wichtig, daß es sich bei der zu übermittelnden Nachricht um eine von vielen möglichen handelt. Ein allgemeines Übertragungssystem besteht aus folgenden Teilen:

Informationsquelle: Unter einer Informationsquelle kann man sich beispielsweise ein Mikrophon in einem Studio oder — im Falle des Fernsehens — eine Bildaufnahmegeräte vorstellen. Die Information ist in einem Fall Sprache oder Musik, im anderen eine Summe von Bildpunkten. Fachgerechter ausgedrückt, besteht die Information aus einer Folge von Buchstaben (Telegraphie oder Telephonie) oder sie ist eine kontinuierliche Funktion der Zeit $f(t)$ (Rundfunk) bzw. $f(x,y)$ (Television).

Sender: Im Sender wird die Nachricht übertragungsfähig gemacht, d. h. sie wird chiffriert oder auf den Hochfrequenzträger moduliert. Während der Übertragung wird dem Nutzsignal — also der zu übertragenden Sprache oder Musik — ein Störsignal überlagert, z. B. die bekannten atmosphärischen Störungen.

Empfänger: Im Empfänger wird die ankommende Nachricht dechiffriert oder demoduliert.

Nachrichteneinfänger: Der Nachrichteneinfänger ist ein elektroakustischer bzw. elektrooptischer Wandler. Aus den dechiffrierten oder demodulierten Signalen entsteht wieder eine Buchstaben- oder Tonfolge bzw. ein Bild. Es muß ausdrücklich bemerkt werden, daß es sich nicht um das gleiche Signal wie am Eingang des Kanals zu handeln braucht, da dieses im allgemeinen durch den Störer verfälscht wird. Im schlimmsten Fall kommt nur der Störer herein, eine bekannte Erscheinung beim Rundfunkempfang.

Der Vorgang der Nachrichtenübertragung läßt sich anschaulich mit dem Transport von Automobilen per Bahn vergleichen, wobei allerdings die Wahrscheinlichkeit, daß das ankommende Automobil dasselbe ist wie das abgeschickte, viel größer sein dürfte. Bei einer beschränkten Zahl von Gütern wird darauf geachtet, die Automobile möglichst rationell zu verladen. Es wird eine möglichst hohe Zahl pro Bahnwagen angestrebt. Diese Zahl ist ein Maß für die transportierbare Automobilmenge.

Definition der Informationsmenge

Im Anschluß an die gemachten Ausführungen stellt sich die Frage nach der Nachrichtenmenge, die durch einen Nachrichtenkanal geschickt werden kann. Offenbar setzt diese Fragestellung ge-

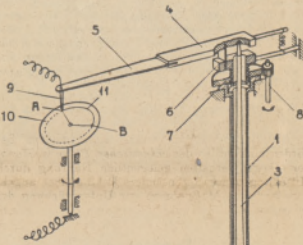


Abb. 1. Schematische Anordnung des Temperaturreglers (Alfred J. Amser & Co., Schaffhausen). 1 Rohr aus hochzähligem Material, 2 Quarzstab, 3 Stelze aus hochzähligem Material, 4 Übertragungshebel, 5 weiche Blattfeder, 6 Basisstück, 7 gezackte Mutter, 8 Ritzel, 9 Kontaktspitze aus Edelmetall, 10 Kontakt-Taumelscheibe aus Edelmetall, Körper 1, 2 und 3 übertragen ihre Dilatation mittels bandgelagerter Hebel 4-5 auf die Kontaktspitze 9. Diese berührt die dem Gegenkontakt bildende, rotierende Taumelscheibe 10 auf einem von der Temperatur abhängigen Bogenstück 11, wodurch das Verhältnis zwischen Ein- und Ausschaltzeit geändert wird. Basisstück 6 kann mittels Ritzel 8 zwecks Einstellung der Solltemperatur vertikal verstellt werden.

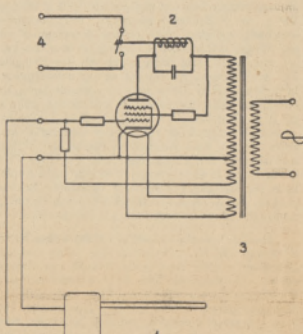


Abb. 2. Schaltungsschema des elektronischen Relais. 1 Temperaturregler, 2 Relais, 3 Speisetransformator, 4 Anschlüsse für Leistungsschutz. Die Röhre ist vollständig mit Wechselstrom betrieben.

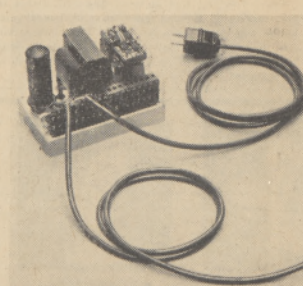
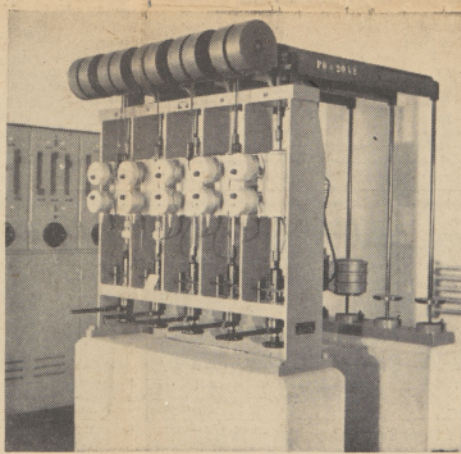


Abb. 3. Temperaturregler mit Taumelscheibenkontakt und elektronisches Relais. Rechts Temperaturregler mit Anschlusskabel zum Relais. Die Einstellung und Feinabstimmung der Solltemperatur erfolgt mit dem Drehknopf an der Skala; die Grobabweichung in dem darunter liegenden Fenster. Links elektronisches Relais mit Anschlusskabel an das Wechselstromnetz.

Abb. 4. Dauerstandprüfmessung in einem Forschungslaboratorium eines schweizerischen Stahlwerkes, ausgerüstet mit Proportionalreglern für eine Temperatur von maximal 1000° C bei einer Regulierungsgenauigkeit von $\pm 0,3^\circ$ C.



näher wie im vorigen Beispiel eine vernünftige Definition der Nachrichtenmenge voraus, d. h. es muß eine Einheit für die pro Sekunde von der Nachrichtenquelle produzierte Informationsmenge angegeben werden. Nach einem Vorschlag von Hartley wählt man dafür ein logarithmisches Maß. Das folgende Beispiel zeigt uns, warum der Logarithmus geeignet ist.

Betrachtet man ein einfaches Nachrichtensystem, bestehend aus zwei Lampen, die in der Sekunde einmal rot bzw. einmal grün leuchten können. Damit erhält man die Möglichkeit, vier Informationen zu übertragen: rot, dunkel; rot, grün; dunkel, grün; dunkel, dunkel. Hat man nur eine Lampe, so stellt dies die einfachste Informationsquelle dar. Sie erlaubt, zwei Aussagen zu machen, je nachdem ob die Lampe brennt oder dunkel ist. Diese Informationsmenge wird nach amerikanischem Vorbild als *binary digit* oder *bit* bezeichnet. Sind in beiden Lampen vorhanden, so beträgt die Zahl der möglichen Zustände 2^2 , die Informationsmenge dagegen ist n bits. Diese beiden Größen sind durch den Logarithmus mit der Basis 2 verknüpft: $n = \log_2 2^n$.

Umwandlungsmöglichkeiten des Nachrichtensignals

Bisher wurde stillschweigend angenommen, daß die Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der n Zustände gleich groß sind. Dies ist nun, wie im folgenden hervorgehoben, in der Praxis nicht der Fall. Wie später ausführlicher begründet wird, nimmt der Logarithmus der möglichen Zustände in einem Nachrichtenkanal mit der Zeit linear zu. Damit ergibt sich, daß das Hauptgewicht auf eine möglichst gute und rationelle Chiffrierung zu legen ist. Hierbei wird der Ausdruck Chiffrierung für alle Nachrichtenverwandlungsarten, also auch für die verschiedenen Modulationen, verwendet. Solche Systeme mit guttem Chiffrierungsgrad bestehen bereits, z. B. das *Morsealphabet*. Nicht sicher ist man allerdings, ob es das allerbeste System ist. Dies hängt davon ab, wie wahrscheinlich — im Falle der Telegraphie beispielsweise — die einzelnen Buchstaben in jeder Sprache sind. Es läßt sich jedem Buchstaben eine Wahrscheinlichkeit p_k ($k = 1, 2, \dots, n$) zuordnen. Leider ist es wegen der enormen mathematischen Schwierigkeiten bisher nicht gelungen, für Systeme mit mehr als vier Wahrscheinlichkeiten, d. h. Sprachen mit mehr als vier Buchstaben, die günstigste Chiffrierung zu ermitteln. Die Ermittlung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten ist statistische Kleinarbeit und ist unseres Wissens bisher nur für die englische Sprache durchgeführt worden.

Berechnung der Informationsmenge einer Informationsquelle

Damit kommt man zur Frage: Wie läßt sich eine Größe angeben, die die Informationsmenge pro Sekunde mißt, wenn die eingangs gemachte Voraussetzung, daß alle Wahrscheinlichkeiten gleich sind, fallen gelassen wird?

Am besten wird dies an einem Beispiel erläutert: Es soll angenommen werden, daß die Information durch eine Sprache mit den vier Buchstaben A, B, C, D gebildet wird. Durch statistische Untersuchungen seien die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Buchstaben zu $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ ermittelt worden. Ein in dieser Sprache geschriebener Text soll unter Verwendung der bekannten bits, darstellbar also 0 und 1 oder ein und aus (z. B. Lampe) chiffriert werden. Es muß natürlich die Bedingung gelten, daß die Nachricht, von Störungen abgesehen, einwandfrei dechiffriert werden kann. Die naheliegende Chiffrierung ist folgende: A = 00, B = 01, C = 10, D = 11. Dieses Code benötigt 2 bits pro Buchstabe. Berücksichtigt man dagegen die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Buchstaben, so ergibt sich ein besserer Code mit A = 0, B = 10, C = 110, D = 111. Für einen solchen Text ergibt sich daher die mittlere, pro Zeiteinheit übertragbare Informationsmenge zu:

$$0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.25 \cdot 3 + 0.25 \cdot 3 = 1.75 \text{ bits/see}$$

Allgemein kann man sagen: Die Informationsmenge $H_{\text{bits/see}} = - \sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k = H_{\text{max}}$

Da analoge Ausdrücke in der Thermodynamik auftreten, bezeichnet man H als *Entropie*. Zu jedem Chiffriersystem gehört somit eine bestimmte Entropie. Es läßt sich zeigen, daß die formelmäßig angegebene Entropie die maximale mögliche ist und damit das Chiffrierverfahren das beste, das gestattet, im Mittel die Informationsmenge H_{max} durch den Kanal zu übertragen. Setzt man die für einen beliebigen Code gefundene Entropie zur Maximalen ins Verhältnis (H/H_{max}), so bezeichnet man den Wert $(1 - H/H_{\text{max}})$ als *Überfülle* (*redundanz*). Diese Überfülle betrifft für die englische Sprache 50%, d. h. wenn man englisch schreibt, so ist die Hälfte des Geschehenen durch die Sprachstruktur, die andere Hälfte frei bestimmt. Offenbar ist beim bekannten Basic English diese Überfülle besonders groß, daß das Basic English nur 850 Worte enthält. Man kann sogar so weit gehen, einen Zusammenhang zwischen Überfülle und Kreuzworträtseln zu suchen. Es ist gelungen, zu beweisen, daß für eine n -stellige $H = - \sum_{k=1}^n p_k \log_2 p_k$ muß, damit diese Rätsel überhaupt aufgestellt werden können.

Nachrichten-Kapazität eines Kanals

Nachdem nun die aus einer Informationsquelle herauskommende Informationsmenge bestimmt ist, soll jetzt die Nachrichtenkapazität eines Übertragungskanales behandelt werden. Bekanntlich mißt man die Informationsmenge in bits/see, und es wäre wünschenswert, daß die Nachrichtenkapazität eines Übertragungskanales in derselben Einheit gemessen werden könnte. Somit stellt sich die

Frage: Wie groß ist die Zahl der bits, die pro see über einen gegebenen Kanal übertragen werden können? Die Antwort auf diese Frage scheint zunächst sehr einfach zu sein. Als Beispiel soll ein Fernschreiber mit 32 möglichen Symbolen gewählt werden. Setzt man der Einfachheit halber gleiche Wahrscheinlichkeiten voraus, so braucht es 5 bits pro Symbol, denn $2^5 = 32$. Gibt die Informationsmenge pro Sekunde n Symbole heraus, so muß für den Kanal eine Kapazität von $5n$ bits/see gefordert werden, um die Informationsmenge zu übertragen.

Ein allgemeiner Ausdruck soll zunächst nur für den Fall diskreter, störfreier Systeme angegeben werden, d. h. solcher Systeme, bei denen Nachricht und Signal eine Symbolfolge bilden. Das Musterbeispiel ist die Telegraphie mit ihren Symbolen von bestimmter Zeitdauer. Bezeichnet man die Zahl der während der Übertragungsdauer T möglichen Kombinationen mit $N(t)$, so errechnet sich die Kanalkapazität zu:

$$C = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log_2 N(t) \text{ bits/see}}{T}$$

Störbehaftetes Übertragungssystem

Es soll jetzt der für die Praxis wichtige Fall des störbehafteten Übertragungskanales betrachtet werden. Das Empfangssignal wird eine Funktion des Nachrichten- und des Störsignals. Auch die Störungen sind statistisch zu erfassen und es ist ihnen analog wie beim Nutzsignal eine Entropie zuzurechnen. Es ist klar, daß die durch einen störbehafteten Kanal gehende Nachrichtenmenge nicht immer mit Sicherheit registriert werden kann. Immerhin kann man Mittel und Wege suchen, daß die Störbekämpfung maximal wird. Ein einfaches Beispiel soll dies erläutern. Betrachten wir zwei mögliche Symbole 0 und 1, die mit der Geschwindigkeit 1000 Symbole/see übertragen werden. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten seien $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$. Die Informationsmenge ist somit 1000 bits/see. Der Kanal weist Störungen auf, so daß 1% der übertragenen Symbole falsch registriert wird. Dies hat zur Folge, daß auch die übertragene Informationsmenge kleiner wird. Man ist versucht zu sagen, daß die Informationsmenge 990 Einheiten betrage. Aber auch dieses Resultat ist nicht richtig, da der Empfänger nicht weiß, wann der Fehler im Text auftritt. Andererseits ergäbe eine solche Rechnung für den Fall, daß die Störungen ein Mehrfaches des Nutzsignals ausmachen, d. h. Sender und Empfänger praktisch unabhängig von einander arbeiten, mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ für die Symbole 0 und 1 die Informationsmenge 500 bits/see. Dies, trotzdem man in einem solchen Fall den Sender zwecks Stromersparnis ebenso gut abschalten könnte. Den richtigen Wert erhält man so, daß man die Differenz der Entropie des reinen Nachrichten- und der Entropie des Störsignals bildet: $H - H_s$. Für H_s ergibt sich nach der früher angegebenen Formel:

$$H_s = - (0.99 \cdot \log_2 0.99 + 0.01 \cdot \log_2 0.01) = 0.08 \text{ bits/Symbol}$$

Somit wird die fehlerhafte Informationsmenge bei der angegebenen Übertragungsgeschwindigkeit 80 bits/see und die übertragbare Informationsmenge 1000 — 80 = 920 bits/see. Dieser Wert stellt die Kanalkapazität des störbehafteten Übertragungssystems für den betrachteten Fall dar. Eine Näherrechnung zeigt, daß im Extremfall, wo also der Störer den Nachrichtenstörer überwiegt, d. h. die Zeichen 0 und 1 mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$ durch den Kanal kommen, $H_s = H$ wird, somit $C = H - H_s = 0$. Es kann keine Informationsmenge übertragen werden.

Es ist eigentlich überraschend, daß sich auch für den störbehafteten Kanal eine Übertragungskapazität angeben läßt, obwohl die Nachrichtenübertragung unsicher ist. Man könnte versuchen, diese Unsicherheit durch mehrfache Übertragung oder durch spezielle Chiffrierung mit sehr großer Überfülle zu verkleinern. Dies hätte eine starke Abnahme der Informationsmenge pro Zeiteinheit zur Folge. Anders gesagt, die Kanalkapazität C wäre eine Funktion des zugelassenen Übertragungsfehlers. Es läßt sich nun mathematisch beweisen, daß die vorigen Ausführungen nur dann richtig sind, solange man versieht, mit einer höheren als der angegebenen Kanalkapazität zu übertragen. Wird jedoch die Übertragungsgeschwindigkeit kleiner oder gleich der Kanalkapazität, so ist es

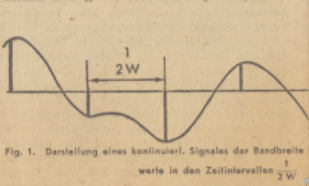


Fig. 1. Darstellung eines kontinuierl. Signales der Bandbreite W durch die Amplitudenwerte in den Zeitintervallen TW.



Fig. 2. Graphische Darstellung des Verhältnisses zwischen Bandbreite und Störverhältnissen für ein gegebenes Übertragungsgeschwindigkeit.

immer möglich, durch Anwendung des entsprechenden Codes mit beliebig kleinem Fehler zu übertragen. Wie allerdings der zugehörige Code herauszufinden ist, darüber herrscht, wie eingangs erwähnt, noch völlige Unklarheit.

Störbehafteter Kanal mit kontinuierlichen Signalen

Die bisher betrachteten Signale waren ausnahmslos diskreter Natur. Der Fall kontinuierlicher Signale (z. B. Rundfunk oder Television) kann aus diesem durch — grob gesagt — limesbildung abgeleitet werden. Der früher angeschriebene Summenausdruck für die Entropie einer Informationsquelle geht hierbei in ein Integral über. Uns interessiert wie früher speziell die maximale Entropie. Diese Frage führt auf ein Problem der Variationsrechnung mit Nebenbedingungen. Das Resultat ist überraschend und ergibt direkt die eingangs erwähnten neuen Erkenntnisse: Die Nachrichtenkapazität des störbehafteten Kanals wird für den Fall kontinuierlicher Signale ein Maximum, falls die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten eine Gaußsche Verteilung aufweisen. Es ist aus der Theorie des Rauschens bekannt, daß gerade diese beliebige Störquelle ein solches Energienspektrum besitzt und somit unter allen Störquellen die größte Stör-Entropie H_s hat. Wenn man $C = H - H_s$ berücksichtigen, so stellt man fest, daß das Rauschen das für die Nachrichtenübertragung unangenehmste Störignal ist!

Die Rechnung ergibt für die Entropie H_{max} der Informationsquelle:

$$H_{\text{max}} = \log_2 \sqrt{k P}$$

mit P = mittlere Signalleistung, k = numerische Konstante. Analog folgt für die maximale Stör-Entropie (Rauschen): $H_s = \log_2 \sqrt{k N}$ mit N = mittlere Rauschleistung.

Betrachtet man ein kontinuierliches Signal mit dem Frequenzspektrum 0— W (Fig. 1) und unterteilt dies in $\frac{1}{2W}$ Zeitintervalle, so kann zu jedem Intervall die zugehörige Amplitude herausgeholt werden. Bei optimaler Chiffrierung muß für die gegebene Amplitudenverteilung gemäß Gesagtem eine Gaußsche Kurve herauskommen. Wegen der 2 TW Freiheitsgrade ist die Gesamtentropie mit diesem Faktor zu multiplizieren. Dies gilt natürlich für Nutz- und Störsignal. Damit ergibt sich der allgemeine Ausdruck für die Kanalkapazität:

$$C = \frac{(H - H_s)_{\text{max}}}{T} \text{ somit } C = \frac{1}{T} \cdot 2W \cdot \log_2 \sqrt{k(P+N)} - \log_2 \sqrt{kN} \\ C = W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P}{N}\right)$$

Daraus errechnet sich sofort die Informationsmenge:

$$\text{Informationsmenge} = T \cdot W \cdot \log_2 \left(1 + \frac{P}{N}\right)$$

Hierbei bedeuten:

- P = mittlere Sendeleistung
- N = mittlere Rauschleistung
- W = Bandbreite des Übertragungssignales
- T = Übertragungsdauer
- $\frac{P}{N}$ = Störverhältnis (signal to noise ratio)

In Worten: Die Informationsmenge, die durch einen Übertragungskanal gegebener Frequenzbreite durchgehoben werden kann, nimmt linear mit der Bandbreite, aber logarithmisch mit dem Störverhältnis zu. Dieser einfache Ausdruck ist in Fig. 2 dargestellt. Um also bei Telephonie, wo das Störverhältnis ≈ 100 sein darf, die Bandbreite um den Faktor 2 reduzieren zu können, muß das Störverhältnis auf 10^4 erhöht werden. Ueber den Nutzen einer solchen Änderung läßt sich streiten, nicht aber darüber, daß das umgekehrte Vorgehen sehr nützlich sein kann: Die Bandbreite bei kleinem Störverhältnis, wie sie in der Praxis durch den Übergang von AM auf FM und PPM bzw. PCM immer mehr verkleinert wird. Dies zeigt noch anschaulich Fig. 2. Die einzelnen Punkte für PPM und PCM entsprechen einzelnen Systemen, die alle die Eigenschaft haben, bits mit einem Fehler von 10^{-6} zu senden. Die einzelnen Zahlen geben für die PPM die möglichen Phasenlagen und für die PCM die möglichen Amplitudenstufen an. Es fällt sofort auf, daß man durch die Punkte eine Kurve ziehen kann, die gegen die ideale Kurve um 8 decibel verschoben ist. Diese 8 db sind ein Maß für die Fehleranzahl bei besserer Chiffrierung. Um noch weiter zu kommen, müßten noch kompliziertere Systeme als die PPM oder die PCM gewählt werden, wobei sich dann die Frage stellt, ob diese 8 db den Mehraufwand rechtfertigen.

Eine weitere, für die Meßtechnik wichtige Aussage ergibt sich, falls das Störverhältnis sehr klein wird. Die Übertragungskapazität geht für diesen Fall wohl auf einen kleinen Betrag zurück, aber sie wird nicht etwa 0. Wir können somit auch im Kanal mit starken Störungen Informationen übertragen. Man kann sich dies erklären, wenn man bedenkt, daß die Informationsmenge in einem sehr kurzen Zeitintervalle. Bei genügend langer Beobachtung kann dann aus der Vielzahl von übertragenen fehlerhaften Informationen gemäß dem Chiffrierungscode die richtige herausgeschält werden.

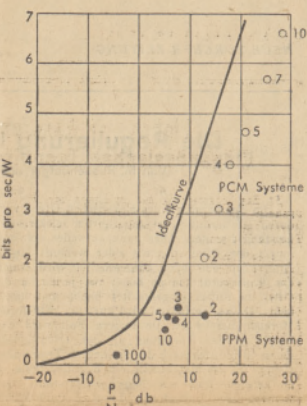


Fig. 3. Graphische Darstellung des Verhältnisses zwischen Kanalkapazität pro Bandbreite und Störverhältnis für PPM und PCM bei einem Fehler 10^{-6} .

Zum Schluß soll ein Beispiel gegeben werden, wo die neue Nachrichten-Entropie anschaulich demonstriert, wieviel noch in speziellen Fällen verbessert werden könnte: Es soll eine Rede übertragen werden. Diese kann man chiffrieren, wobei pro Buchstabe im Mittel 2 bits und bei Worten 9 bits gebraucht werden. Als normale Rede-geschwindigkeit sind 100 Worte pro Minute zu betrachten, d. h. 15 bits/see im Mittel. Hierbei sind sämtliche Nuancen, wie Klangfarbe, Ton n. a., weggelassen, und es wird nur auf Verständlichkeit geachtet. Fig. 3 zeigt, daß bei einem Störverhältnis von 20 db 6.6 bits/W übertragen werden können. Somit beträgt die für die Übertragung der Rede benötigte Bandbreite bei idealer Chiffrierung 2.3 Hz, eine unvorstellbar kleine Größe.

Ausblick

Die letzte Rechnung zeigt, wie unvollständig eigentlich die bestehenden, gut eingeführten Übertragungssysteme ausgenutzt sind. Die neuen Erkenntnisse werden aber kaum die Entwicklung einer Niederfrequenz-Mehrkannaltheorie mit sich bringen oder den raschmöglichen Übergang auf die bisher günstigsten Systeme der PPM oder PCM forcieren. Vielmehr dürfte die neue Nachrichten-Entropie vor allem dort eingesetzt werden, wo eine beliebige Bandbreitenerweiterung zur Verkleinerung des Störverhältnisses nicht mehr möglich ist, d. h. im Fernsehen und vor allem im Farbfernsehen. Es sind denn auch schon von verschiedenen Seiten Untersuchungen in dieser Richtung angestellt worden, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen. Die Auswirkungen der neuen Theorie auf die Praxis dürften sich jedoch erst in den nächsten zehn Jahren zeigen.

Max Baumgartner, Zürich

Rundschau

Meßgerät für mechanische Schwingungen, ob.

Die Massa Laboratories Inc. in Ohio fabrizieren ein neues elektro-mechanisches Gerät zur Messung mechanischer Schwingungen, das sich durch sehr große Meßbereiche sowohl bezüglich der Frequenz wie über Amplituden auszeichnet. Das Hauptstück ist ein leistungs-fähiger Beschleunigungsmesser, der für konstante Beschleunigungen einen uniform elektrischen Strom liefert in einem Frequenzbereich von 10 Hertz bis 20 Kilohertz und welcher direkt proportional ist zu den mechanischen Schwingungen, die Beschleunigungen entsprechen von weniger als 0.001 g bis über 100 g (g = Erdbeschleunigung). Die Phasenverschiebung zwischen mechanischer Schwingung und zugehöriger elektrischer Spannung ist über den ganzen Frequenzbereich unabhängig von der Frequenz. Das Accelerometer spricht nur an auf Schwingungen in Richtung seiner Hauptachse; es erlaubt damit, die absoluten Vektorkomponenten irgendeiner Schwingung an beliebigen Punkten des Prüfobjekts zu messen. Einrichtungen zur Fernanzeige der elektrischen Signale sind vorgesehen, ebenso die nötigen Anpassungen zur Verwendung als tragbares Feldgerät. Es ist so entworfen, daß es gebraucht werden kann zur Messung gewöhnlicher akustischer Schwingungen, zur Analyse von Druckwellen von Geschützfeuer oder anderen intensiven Explosionswellen.

"Hande" — ein vielseitiges elektrisches Kleinwerkzeug. W.K. Das elektrische Kleinwerkzeug "Hande" besitzt eine große Anzahl von Zusatzgeräten, die sich rasch ein- und ausbauen lassen. Mit diesem Universalwerkzeug kann man schleifen, polieren, bohren, fräsen, gravieren, ansapfen, entgraten, entrosten, bürsten, radieren, schneiden, trennen und noch vieles andere. Auch das Material, auf dem das "Hande" zur Arbeit eingesetzt werden kann, ist fast unbeschränkt, es arbeitet ebenso auf Stahl, Eisen, Aluminium, Kupfer, Nickel, wie auf Stein, Edelmetallen, Holz, Elfenbein, Glas, Bakelit, Plastik, Plexiglas und anderem Material. Dabei ist das Werkzeug überaus handlich und besitzt eine Länge von nur 15 cm, bei einem Durchmesser von 4 cm und einem Gewicht von bloß 350 Gramm. Seine Drehzahl beträgt 25 000 T. p. M., seine Leistung 30 Watt bei einer Spannung von 220 Volt.



PLANSCHRANK ab Fr. 420.— RWD-ARCHITEKT 11 Typen Pute vertik. ab Fr. 175.— RWD-HOVEKO vertikal und horizontal 4 Typen ab Fr. 490.— RWD-REX und PERFECT STÄNDER REX Fr. 65.— Zeichenstühle ab Fr. 75.— RWD-ELECTA-Zeichenmaschinen 285-Zeichenständer ... Fr. 285.— Reihstift 100/150 ... Fr. 70.— RWD-IMPERATOR Universal-Küchenmaschine ab Fr. 2500.— KARTOFFELSCHÄL-MASCHINE 3000—1800 kg Stk. ab Fr. 1200.—

Some Considerations Concerning Nernst's Theorem

By F. E. SIMON

Clarendon Laboratory Oxford

(Z. Naturforschg. 6a, 397—400 [1951]; eingegangen am 8. Juni 1951)

To John Eggert for his 60th birthday

Es wird diskutiert, welche Minimum-Annahmen von der klassischen Thermodynamik zum Nernstschen Theorem führen. Nernst hatte geglaubt bewiesen zu haben, daß das Verschwinden der spezifischen Wärmen zusammen mit dem zweiten Hauptsatz genügt, um sein Theorem abzuleiten. Sein Beweisgang und die Einwände gegen ihn werden besprochen.

Es wird dann gezeigt, daß ein System von Substanzen mit verschwindenden spezifischen Wärmen, aber nicht verschwindenden Entropiedifferenzen, äußerst merkwürdige Eigenschaften aufweisen würde; z. B. könnte eine Substanz trotz verschwindender spezifischer Wärme einen endlichen thermischen Ausdehnungskoeffizienten behalten. Es wird an einem speziellen Fall, dem des entartenden, idealen Gases, dargelegt, daß ein dem Virial-Theorem verwandter, ganz allgemeiner Satz genügt, um ein derartiges Verhalten auszuschließen. Schließlich wird die Frage aufgeworfen, ob nicht dieser Beweis für alle möglichen Systeme in Abhängigkeit von allen möglichen Parametern verallgemeinert werden könnte.

When I was asked to contribute to the volume celebrating Professor Eggert's 60th birthday my thoughts naturally went back to the time when we both were working as Nernst's assistants in the Laboratory of Physical Chemistry at the University of Berlin soon after the first world war. Eggert had just started his photochemical investigations which from then on have occupied most of his attention, while I was trying to elucidate the terms of validity of the 3rd law. As this has occupied me on and off since that time it might be appropriate to make a few observations concerning the thermodynamic background of the 3rd law, particularly as some related points have more recently been discussed by Schottky¹.

In the early twenties a number of systems had been found which taken at their apparent face value seemed to contradict the 3rd law; (in particular: solutions, mixed crystals and glasses). A careful investigation showed however, that these systems were frozen-in in a state of disorder and were not in internal thermodynamic equilibrium. Naturally a law of thermodynamics can only apply to systems in thermodynamic equilibrium; frozen-in systems do

not contradict the 3rd law only but thermodynamics in the ordinary sense cannot be applied to them. These investigations finally led to the following statement² of the 3rd law: „At absolute zero the entropy differences disappear between any states of a system which are in internal equilibrium.“ Generally a system is only frozen-in as regards one parameter and not another, so the following formulation may be preferred³: „The contribution to the entropy of a system due to each component which is in internal equilibrium disappears at absolute zero.“ I believe that this part of the history of the 3rd law can now be regarded as closed.

There is another point however, which was discussed quite vigorously soon after the enunciation of the 3rd law and to which no definite answer has yet been given. It is obvious that without introducing some postulates characteristic of quantum theory it is impossible to derive the 3rd law from classical thermodynamics. The question is what are the minimum assumptions that we must make.

One of the postulates of the 3rd law as formulated by Nernst is the disappearance at absolute zero of the temperature coefficient of the energy (U) (or of the enthalpy). This condition is, as we now know, fulfilled by the fact that the specific heats of all substances disappear on approaching absolute zero. The second postulate is that the temperature coefficient of the free energy (F) (or of the thermodynamic potential) disappears at absolute zero. While

¹ W. Schottky, Naturwiss. 31, 440 [1943].

² F. Simon, Z. Physik 41, 806 [1927]. Ergebn. exakt. Naturwiss. 9, 222 [1930]; W. Schottky, Thermodynamik, Berlin 1929. R. H. Fowler and E. A. Guggenheim, Statistical Thermodynamics, Cambridge 1939, p. 224 ff.

³ F. Simon, Physica 4, 1089 [1937].

it is obvious that the second condition includes the first, the opposite does not apply directly as we may see from the integrated form of the Gibbs-Helmholtz Equation:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_v = - \int_0^T \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_v(T=0).$$

The condition $\partial U/\partial T = 0$ is not by itself sufficient to derive the 3rd law for it does not exclude the existence of a finite $\partial F/\partial T$ at absolute zero, i.e. of finite entropy differences.

Nevertheless Nernst⁴ believed that he could derive his Theorem from the single condition that the specific heats disappear. We can best describe his arguments by using a diagram showing the entropy, a concept he preferred to avoid: Let us take a system consisting of a substance with vanishing specific heats^{4a} but *not* obeying the 3rd law. Figure (1) gives the entropy of such a substance as a function of temperature for different values of a second parameter, which in order to fix our ideas we take to be the volumen (curves $v_1 - v_4$). This system differs from a classical one because the entropy curves do not tend towards minus infinity and it does not obey the 3rd law because the curves do not end up in a single point at absolute zero. The unattainability of absolute zero is a triviality in classical systems because the work needed to cool down a substance to that temperature becomes infinite. It is also a consequence of the 3rd law. In our imaginary system, however, absolute zero could be attained; an adiabatic change of the volume would lead us from point A to B.

Let us now run through a Carnot cycle between the temperature T and a very low but finite temperature T^1 . We expand adiabatically from A to B¹, compress isothermally from B¹ to C¹, compress adiabatically from C¹ to D and return isothermally to A. In this cycle it is necessary to have a bath at constant temperature T^1 to take away the heat (= B¹BCC¹) given out during the isothermal compression B¹C¹. If however, the expansion has taken us down to absolute zero (i.e. $T^1 = 0$), Nernst argued that a completely new situation arises: a temperature bath is no longer needed as even in classical systems

there is no reversible development of heat at absolute zero. One can therefore carry out a Carnot cycle between the temperature T and absolute zero, the whole effect of which is that a certain amount of heat is absorbed at a finite temperature and all this heat energy is transformed into mechanical work. This would be a perpetual motion machine of the second kind and in contradiction to the second law. So Nernst concluded that it must be impossible to reach absolute zero. Hence it follows that such systems as we have described cannot exist⁵.

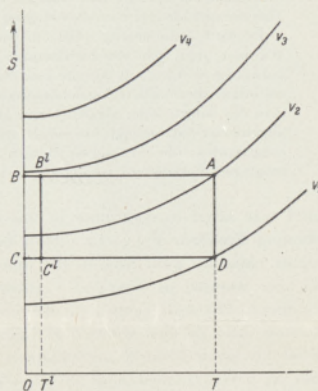


Fig. 1. Entropy — temperature diagram of a substance with disappearing specific heats but non — disappearing entropy differences.

Nernst thus believed he had deduced his Theorem from the 2nd law plus the fact that the specific heats disappear. Many objections have been made against the validity of Nernst's argument⁶ and I am going now to mention the most important of them, (not in chronological order):

(1) Bennewitz⁷ argued that as each step in Nernst's procedure was in agreement with the 2nd law the cycle taken as a whole could not be in

⁵ We had better add that if a system seems by experiment to have an entropy diagram like fig. 1, then it cannot be in internal equilibrium.

⁶ As the law of the unattainability of absolute zero may be shown by more rigorous reasoning to be a direct consequence of the 3rd law it is not of course invalidated by the following criticisms. (F. E. Simon, The approach to the absolute zero, Very Low Temperatures, Science Museum, p. 58, 1937; see also Fowler and Guggenheim, Statistical Thermodynamics, p. 225.)

⁷ K. Bennewitz, Handbuch der Physik 9, 172 [1926].

contradiction to it. This objection does not seem to me to be a valid one. It is true that according to the second law a Carnot cycle working between a finite temperature and absolute zero would convert the whole of the heat energy into free energy. It is also obvious, however, that if absolute zero can be attained the cycle would make nonsense of the second law. A piece of machinery which fully converts heat into free energy is a perpetuum mobile of the second kind and this is not changed by the fact that absolute zero may be reached inside this machinery for part of the time.

(2) Planck⁸ has shown in the 4th edition of his „Wärmestrahlung“ that however many degrees of freedom a system may have, there exists a temperature below which the laws of thermodynamics may not be applied. The reason is that because of quantum effects, the effective number of degrees of freedom becomes so small that it is no longer permissible to speak of a thermal state or even of a temperature. He concludes that all those thermodynamic considerations which postulate an indefinite cooling down of a substance lose their validity: in particular, he rules out imaginary experiments which are based on the use of absolute zero. Planck does not mention specifically Nernst's cycle but it seems quite probable that he had it in mind. I personally cannot see how Planck's remarks could invalidate Nernst's cycle; the main point in our example is that the continuing expansion will lead to complete extraction of the heat content and whether one can define the temperature in the vicinity of absolute zero seems immaterial. Also I cannot see why one should be forbidden to consider changes of a parameter like the volume at absolute zero; that is what the theory of elasticity does implicitly all the time.

(3) The most serious objection to the Nernst cycle was put forward by Einstein⁹: he pointed out that although it may be impossible to perform an imaginary cycle because of experimental difficulties it is essential that it can be carried out at least in principle. Now we can never make an experiment completely reversible, nor can we completely avoid heat transfer from warmer parts of the apparatus to

the colder ones. It is true that most of the imaginary experiments used in thermodynamics are open to this criticism but generally one can always imagine that these irreversible changes can be reduced to smaller and smaller proportions of the total change, so that the results derived from such considerations give the limiting value for perfectly reversible processes. In Nernst's cycle however, the situation is different. If we have even the smallest irreversible change during the part of the process carried out at the absolute zero, the whole process cannot work; because as soon as we have a temperature only slightly higher than absolute zero, the compression necessarily results in the development of heat and we return to higher temperatures on a parallel to the T axis. This will happen in the very first moment we arrive at absolute zero and the subsequent compression will therefore lead us immediately back along the line BA; hence it is impossible to realise the line BC.

Einstein's argument is certainly irrefutable. His thesis however does not seem to be *directly* connected with Nernst's train of thought and one therefore does not feel quite happy with this kind of argument; in particular as we know now that the heat conductivities of all finite bodies tend towards zero with falling temperature and that many processes like for instance the elastic deformation of solid bodies become more and more reversible the lower the temperature.

Nernst, it must be emphasised, never agreed that the objections were valid and in the last words of the last edition of his book¹⁰, he reaffirms this conviction. Nevertheless one has to admit that the attempt to derive the 3rd law from the 2nd plus the vanishing of the specific heats has not succeeded. One has even to go further: in the late twenties and early thirties various scientists, particularly Eucken¹¹ and Fowler¹² voiced their belief that the 3rd law is not generally valid. Obviously these scientists must have thought that systems like the one we have discussed and which seemed so absurd to Nernst were quite feasible and could exist in nature under equilibrium conditions.

In actual fact such systems would have some very odd properties. Let us consider as an example a solid

¹² R. H. Fowler and T. E. Sterne, Rev. mod. Physics 4, 707 [1932]. „We reach therefore the rather ruthless conclusion that Nernst's Heat Theorem strictly applied may or may not be true, but is always irrelevant and useless—applied to 'ideal states' at the absolute zero which are physically useful concepts the theorem though often true is sometimes false, and failing in generality must be rejected altogether.“

⁴ W. Nernst, Berlin, S.-B. preuß. Akad. Wiss. physik.-math. Kl., Feb. 1st. 1912; Grundlagen des neuen Wärmesatzes, Halle 1918, p. 72.

^{4a} When I speak in an abbreviated sense of the specific heats disappearing, I mean that they do so in such a way that the entropy at absolute zero remains finite. (See F. Simon, l. c. 2, p. 226.)

⁸ M. Planck, Wärmestrahlung, 4th Edn. Leipzig 1921, p. 218.

⁹ A. Einstein, La Structure de la Matière. Congrès Solvay 1913. Paris 1921, p. 293 ff.

¹⁰ W. Nernst, l. c. 4, p. 197.

¹¹ W. Eucken, see e.g. Lehrbuch der Chemischen Physik, Leipzig 1930, p. 58, 59.

like the one illustrated in the figure. We can see at once that as

$$\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{3\alpha}{K}$$

(3α = thermal expansion coefficient,
 K = compressibility)

the thermal expansion remains finite down to absolute zero, (we exclude the case of the compressibility becoming infinite for which there is not the slightest indication). We then would have the absurd situation (contradictory to Grüneisen's law) that this solid body would possess a thermal expansion which remains finite but a specific heat which tends to zero in approaching absolute zero.^{13,14} Does one really need a new postulate to show that this is impossible? Perhaps it may be possible to exclude such states by considerations of statistical mechanics rather than from thermodynamic ones¹³.

There is one particular case where one can show that a very general law of statistical mechanics is sufficient to lead from the vanishing of the specific heats to the vanishing of the entropy differences. Let us consider an ideal gas: It is a well known result of statistical mechanics that for systems in internal equilibrium:

$$pV = \frac{2}{3} E, \quad (E = \text{kinetic energy}) \quad (1)$$

a relation which also holds in quantum theory^{13a} and which in classical theory can be derived from the Virial Theorem.

If we differentiate with respect to T at constant v and introduce

¹³ A thermal expansion need not necessarily be caused by the molecular motion but may also be due to an internal transition. For example in Invar a thermal transition gives rise to a contraction of the volume which just about compensates the ordinary thermal expansion at room temperature, so that the overall expansion is about zero. The internal transition, however, must be accompanied by a change in energy and we would therefore again have a connection between volume change and heat capacity.

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T,$$

we arrive at:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_T = \frac{2}{3} \frac{C_v}{V}. \quad (2)$$

Now let us assume we measure the specific heat of a gas at constant volume and we find that the specific heat tends towards zero with falling temperature. It then follows from equation (2) that the entropy differences must also disappear¹⁴.

We thus have here one case in which the application of a very general law has taken us from the vanishing of the specific heats to the vanishing entropy differences. Is it not possible that this kind of consideration can be extended in full generality to cover all parameters of all systems in internal equilibrium, however complicated?

One may ask however if thinking on these lines is really meaningful. The theoretical physicist tries to calculate the thermal properties of a system by first finding its entropy and subsequently deriving the specific heat and where the calculation of the entropy has been possible it has always led to agreement with the 3rd law. Nevertheless our problem seems to be of intrinsic interest, particularly as quantum statistics have not yet provided a completely general proof of the 3rd law, which means that the lowest energy state is never degenerate. Of course it may turn out that the suggested generalisation can be shown to be impossible, but then at least a definite answer would have been given to this problem started by Nernst's cycle nearly 50 years ago.

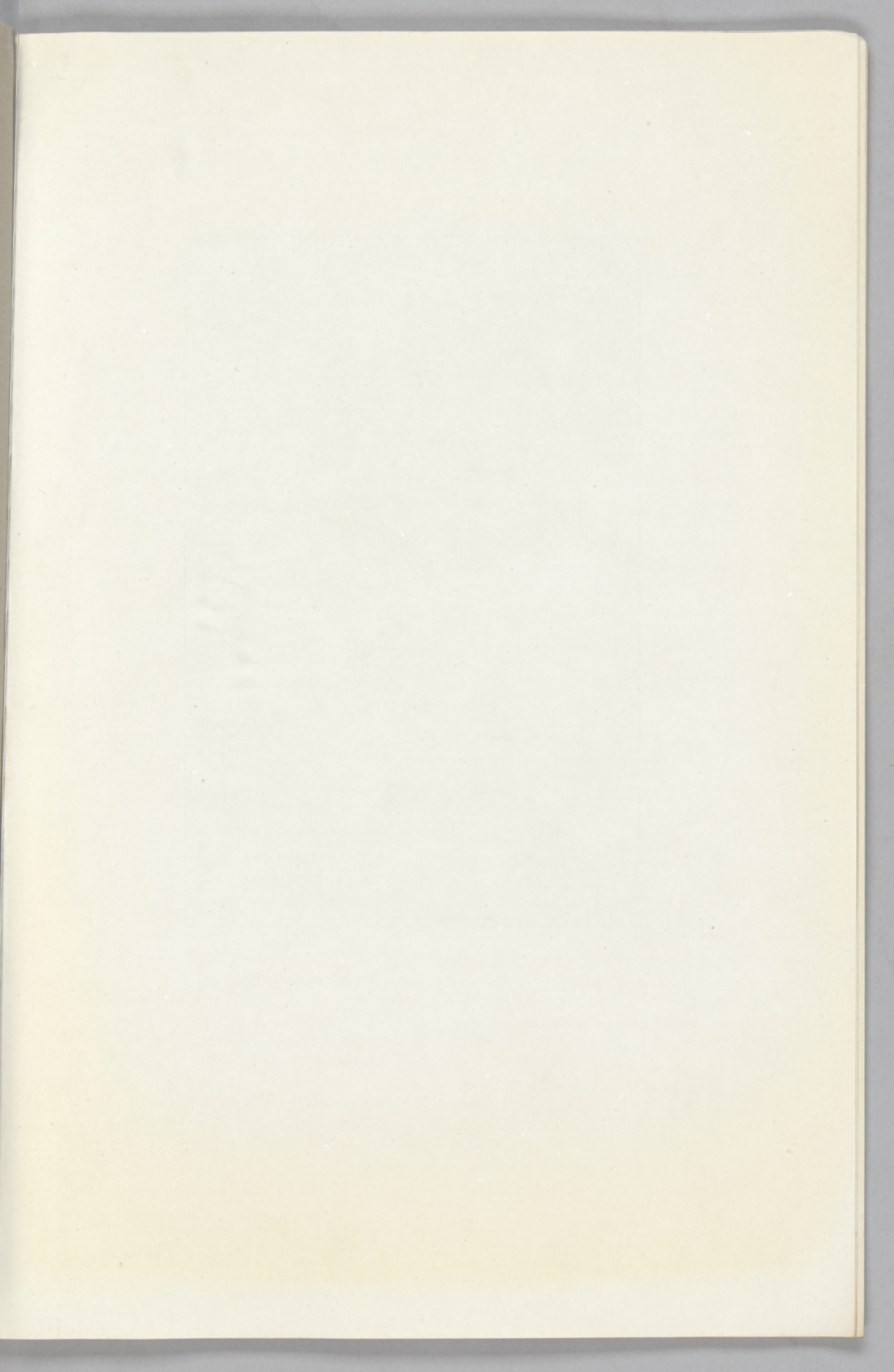
^{13a} e. g. Schroedinger, *Statistical Thermodynamics*, Cambridge 1946, p. 52, equ. (7.30).

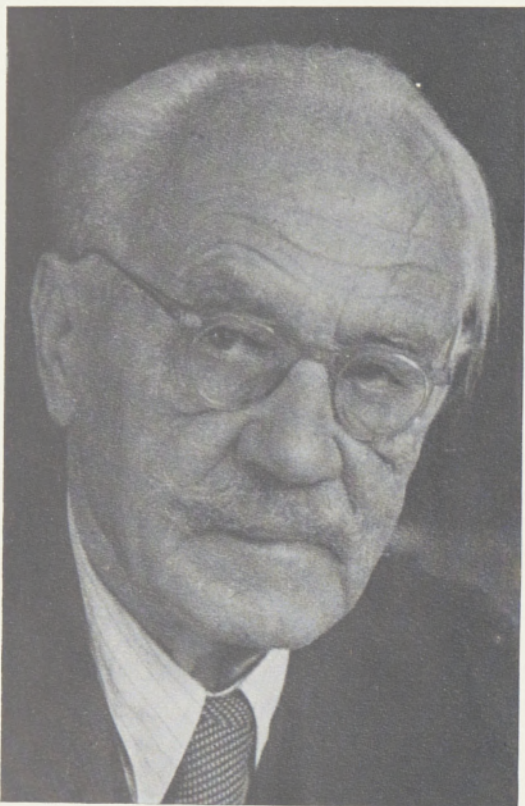
Prof. Born has informed me that equ. (1) can be derived in an elementary manner both for classical and quantum theory.

¹⁴ Incidentally C_p would fall more slowly than C_v ; it can easily be shown that $C_p - C_v$ would become proportional to T .

ARNOLD JOHANNES WILHELM SOMMERFELD

1868—1951





A. Sommerfeld

ARNOLD JOHANNES WILHELM SOMMERFELD

1868–1951

ARNOLD SOMMERFELD was one of the most distinguished representatives of the transition period between classical and modern theoretical physics. The work of his youth was still firmly anchored in the conceptions of the nineteenth century; but when in the first decennium of the century the flood of new discoveries, experimental and theoretical, broke the dams of tradition, he became a leader of the new movement, and in combining the two ways of thinking he exerted a powerful influence on the younger generation. This combination of a classical mind, to whom clarity of conception and mathematical rigour are essential, with the adventurous spirit of a pioneer, are the roots of his scientific success, while his exceptional gift of communicating his ideas by spoken and written word made him a great teacher.

I was not a pupil of Sommerfeld, but met him for the first time in later life. Yet from this moment our friendship was firmly established. The picture of his personality which I carry with me and shall try to describe in these pages is drawn on this background of personal contact. I have further at my disposal a charming autobiographic sketch, which he wrote in 1919 for the Academy of Vienna, with an appendix probably added in 1950, and several obituary articles, of which those written by Heisenberg and von Laue are the most remarkable.¹

Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld was born in Königsberg, East Prussia, on 5 December 1868. His father, Dr Franz Sommerfeld, was a medical practitioner devoted to science and a passionate collector of natural objects like minerals, amber, shells, beetles, etc. Königsberg—now a Russian town with another name—was the capital and coronation city of the Prussian kings and had developed a specific atmosphere of erudition and culture. It was Immanuel Kant's place of birth and permanent home. The university of Königsberg was one of the first where theoretical physics became an acknowledged branch of study. This was due to the great authority exerted by Franz Neumann, who had founded an Institute of Theoretical Physics independent of and equal in rank with the experimental department. It is astonishing how many of the distinguished mathematicians and scientists of Germany's best period have come from Königsberg. When Sommerfeld became a pupil of the Altstädtische Gymnasium (High School) there were simultaneously attending Hermann Minkowski, Max Wien and Willy Wien. Sommerfeld says that at school he

¹ I have to thank Mr E. Sommerfeld, son of the late Professor A. Sommerfeld, for supplying a list of publications and the photograph reproduced here.

I am deeply indebted to Dr E. Ruch for helping me to compile the material for this article and correcting the text.

was 'almost more' interested in literature and history than in the exact sciences, and that he was equally good in all subjects including the classical languages. In 1886 he passed the final examination and entered the university of his home city.

After some irresolution he decided to study mathematics, but also attended lectures on political economy and philosophy. The teaching staff in the mathematics department was at that time unusually brilliant; Lindemann, who later solved the ancient problem of the quadrature of the circle (by proving π to be a transcendental number) was the head, Hurwitz was assistant professor (*Extraordinarius*) and Hilbert, lecturer (*Privatdozent*). It was the inspiration radiating from these men which kept Sommerfeld from following the custom of German students to change their university. When he attended Hilbert's lecture on the theory of ideal numbers he came to believe that his interest was mainly directed towards the most abstract mathematics. Later he regretted having remained in Königsberg, as he was induced to join one of the students' societies (*Burschenschaften*) which absorbed a considerable part of his time.

Franz Neumann's successor in the chair of theoretical physics, R. Volkmann, seems not to have influenced young Sommerfeld. The centre of interest was at that time the transition from the older electromagnetic theories, based on action at a distance, to Maxwell's field theory, whose predictions had just been splendidly confirmed by Hertz's experiments. Sommerfeld found the inspiration, which Volkmann could not give, in a young scholar, seven years his senior, Emil Wiechert, who later became, like Sommerfeld himself, a master in electrodynamic theory, and well known through his work on the retarded potentials and through his pioneer work in seismology. In 1890 these two together devised a harmonic analyzer, which was built in Volkmann's institute (2).² It was of similar construction to that invented by Sir W. Thomson of which they, however, had not heard. The instrument was intended to be used for analyzing a set of temperature measurements at various depths at a station, founded by Neumann in the Botanic Garden. A prize was offered by a local scientific society for the best evaluation of these measurements. Thus Sommerfeld was led to the problem of conduction of heat (4). The case was difficult because the station was on the foot of a small hill. Approximating the surface by two intersecting planes, Sommerfeld reduced the problem to the solution of a linear differential equation on a Riemannian surface of several sheets, a method which he soon applied with great success to problems of optical diffraction. He competed for the prize, but had to withdraw his paper because of an error in the boundary conditions. In his recollections he remarks that this failure had its root in the characteristic attitude of this period to 'stick to mathematical generalities', instead of studying the peculiarities of the problem and using numerical methods.

In 1891 Sommerfeld obtained the doctor's degree in Königsberg with a thesis, 'The arbitrary functions in mathematical physics' (1), which he conceived and wrote down in a few weeks. With this paper he entered a field of mathematical

² Numbers in parentheses refer to the serial numbers in the bibliography.

study to which he remained faithful all his life, the representation of arbitrary functions by given sets of functions, for instance the eigenfunctions of partial differential equations. One volume of his Lectures, which he published during the last years of his life, deals with this branch of mathematics.

The first attempt 'to sail the high seas of theoretical physics proper', as he expresses it, was a paper entitled 'Mechanical representation of electromagnetic phenomena in bodies at rest' (3), which was stimulated by his reading of William Thomson's works. He modified Thomson's gyroscopic model of the ether by exchanging the part played by the electric and magnetic force. However, he soon became convinced that not much was gained by such mechanical 'explanations' of Maxwell's equations. Still the paper gave him the satisfaction of attracting the attention of Boltzmann. Sommerfeld's later attitude to the foundations of electromagnetic theory is clearly formulated in the first lines of the preface to volume III of his published Lectures, where he says that from his youth Heinrich Hertz's axiomatic construction of the fundamental equations had appeared to him as the model presentation.

In 1892 Sommerfeld passed the examination for the teacher's diploma and did then his year's military service. In October 1893 he went to Göttingen, the centre of mathematics in Germany. Through the accident of personal connexions he became assistant at the Mineralogical Institute under Th. Liebisch. But his real interest remained directed towards mathematics and mathematical physics. 'Overwhelming was the impression which I received, in lectures and discussions, from Felix Klein's grand personality.' Thus he describes the influence of that man whom he regarded as his real teacher, not only in pure mathematics, but also in his attitude to mechanics and mathematical physics. 'Well can I understand this feeling of devotion and awe which Klein inspired, as I came under his influence about eleven years later, at a time when Klein's magical powers as a teacher were perhaps at their summit. In fact, I found him too olympian, his lectures too perfect, his seminar discussions too encyclopaedic, and I preferred the more human personalities and formally less accomplished but livelier teaching of Hilbert and Minkowski. But these were not yet in Göttingen in 1893 when Sommerfeld appeared there, hence it is no wonder that he fell completely under Klein's spell. Many a time later we have discussed the merits of these three giants of mathematics, but Sommerfeld never wavered in his preference for 'the great Felix'.

In 1894 Sommerfeld became Klein's assistant for the management of the Mathematical Reading Room and its famous library. One of his duties was to work out Klein's lectures and to produce a copy for the use of students in the reading room. Thus he gained an intimate knowledge of Klein's characteristic method of lecturing which was of decisive influence on his own future teaching. Klein directed his attention towards the problems of mathematical physics and tried to transfer to him that attitude to these problems which he had laid down in previous lectures. The first fruit of this influence was Sommerfeld's thesis of 1896, 'Mathematical theory of diffraction' (7, 8), with which he was admitted (*habilitiert*) as a *Privatdozent* of mathematics.

In this paper the ideas conceived in the earlier attempt on heat conduction, became mature and fertile. He studied the propagation of electromagnetic waves on a Riemann surface with two branches and obtained thus the first rigorous solution of a diffraction problem in the form of a complex integral, well suited for numerical calculation. W. Voigt, who had the chair for theoretical physics, became interested in the progress of this paper and used it later in his own way. Soon after its publication (7) H. Poincaré took up this 'méthode extrêmement ingénieuse' in *Acta Mathematica*. In fact it is to-day regarded as a classic of theoretical physics.

Sommerfeld devoted himself with enthusiasm to his lecturing which covered a wide field in mathematics, including the theory of probability and the partial differential equations of physics. In 1895-1896 Klein gave a series of lectures on the theory of the spinning-top, which was the starting point of the well-known book *Die Theorie des Kreisels* by Klein and Sommerfeld. It is the most valuable and mature fruit of the collaboration of these two men and reflects the change in attitude to mechanics in general which Sommerfeld experienced during the long period of writing the four volumes. The first two volumes stress the mathematical point of view while the third and the fourth (finished in 1910, when Sommerfeld was already in Munich) deal with the applications to geophysics, astronomy and technology, using often simple intuitive arguments. This tendency was also due to Klein who wished to fertilize German technology by presenting mathematical methods in a plain and easy language; Sommerfeld became one of its foremost protagonists. His whole scientific development was in the direction from pure towards applied mathematics and empirical science. There was a moment when he had the opportunity to do experimental work. Voigt offered him an assistantship in his laboratory. But Sommerfeld declined, though with regret. Later he became convinced that his decision was right, and that he had made the best use of his gifts by concentrating on the theoretical interpretation and inspiration of experiments.

Sommerfeld's first encounter with a problem of actual experimental physics happened during this period when he became interested in the propagation of electromagnetic waves along wires (13, 14), as used by Hertz in his famous experiments. This problem was at that time of central importance for experimental physics, in a similar way as hollow guides are to-day. It had already been treated by Hertz for an infinitely thin wire, and Poincaré, J. J. Thomson, Rayleigh and Drude had tried to improve the solution by taking the finite diameter into account, yet without complete success. Sommerfeld (14) solved the problem rigorously and developed formulae which represent the dependence of the field on the properties of the material of the wire.

In 1897 Sommerfeld became Professor of Mathematics at the Mining Academy in Clausthal, in the Harz Mountains. There he had mainly to lecture on elementary mathematics. During this time he published a paper on the diffraction of X-rays where he applied his method of many-valued solutions to the case of an aperiodic pulse (17, 18). In Clausthal he became the editor of Volume V (physics) of the *Mathematical Encyclopaedia*, founded and directed by Klein;

a big task which was to absorb much of his time and strength for a long period.

In 1900 he was offered and accepted the chair of technical mechanics at the Technological Academy (Technische Hochschule) in Aachen. Thus he was compelled to concentrate for a few years on technological problems.

At first his new colleagues and students regarded him with some distrust as a mathematician, but he soon had the satisfaction of being recognized as a useful member of the staff, not only in the lecture room, but also for the practice of engineering. He was elected a fellow of the technological society, was consulted as an expert, and published some papers on engineering problems, as, for instance, on the dynamical aspect of the strength of materials (19), on the oscillations of dynamos (24), on the action of railway brakes (21). The most important paper in this series is that on the hydrodynamical theory of lubrication (23), in which older work by Petroff and Osborne Reynolds was developed and compared with new observations. He seems to have particularly enjoyed this evidence of the power of mathematical physics applied to an object which was previously regarded as inaccessible to exact reasoning.

But these technical diversions could not suppress his deeper theoretical interests. He turned his attention to electrodynamics and investigated the resistance of coils for alternating current (28, 38). Then he proceeded to a more fundamental problem, the dynamics of the electron (30, 31, 35, 37). At that time Lorentz's theory of the electromagnetic field and of the electron was generally accepted. It was based on the assumption of an aether at rest, defining an absolute system of reference and capable of electric and magnetic excitation, described by Maxwell's equation for a field in empty space. The electrons were assumed to be rigid spheres carrying a fixed density distribution of electric charge. The problem was to find the equations of motion for such a rigid electron under the action of its own field and an external given field. J. J. Thomson had first shown that one obtained in this way an increase of inertia and suggested that possibly the whole mass of the electron might be of electromagnetic origin. This work had been improved by Abraham, Herglotz and others, and was now taken up by Sommerfeld in three voluminous papers (37), which displayed a great amount of mathematical skill to the solution of this problem. Using the method of Fourier transforms he found explicit formulae for the field of electrons in arbitrary motions and calculated the resulting force and the resulting moment, obtaining not only Abraham's formula for the mass of an electron in a quasi-stationary state of motion, but expressions valid for arbitrary accelerations, and he discussed even the case of velocities greater than that of light. But alas, just in the same year 1905, when the last of these three formidable papers appeared, it had become clear that no particle could ever move faster than light: it was the year of Einstein's first paper on relativity, which removed the fixed aether, the rigid electron and with it the foundations of Lorentz's theory.³ A situation like this is a test not only of a man's power of scientific judgment but also of his character. It is not easy to abandon a line of research in which a tremendous

³ H. Poincaré's earlier publication of 1904 was unknown in Germany.

amount of work has been invested, as can be seen from the attitude of the great Lorentz himself and of some of his followers, like Abraham. But Sommerfeld burned his boats and became a convinced relativist. It is, however, amusing to remark that just that part of Sommerfeld's paper which deals with electrons moving faster than light, and which seemed finally doomed by relativity has, much later, experienced a resurrection. For it can be applied, with some modification, to electrons penetrating material bodies where the velocity of light is so reduced that it is slower than the electrons. In 1934 R. A. Tcherenkov discovered this phenomenon which roughly corresponds to the conical shock-wave predicted by Sommerfeld. In the optical volume (V) of his Lectures he has given a very elegant outline of the theory of the Tcherenkov radiation.

In 1906 Sommerfeld was offered the chair of theoretical physics in Munich, previously held by Boltzmann. He accepted and took with him his assistant Peter Debye, the first of a long line of brilliant pupils and collaborators. Sommerfeld had several opportunities to exchange Munich for other places, but he refused all offers, even a call to Vienna (1916) and to Berlin (1927) as Planck's successor. In Munich he felt he was at the right place; here he could lecture on various branches of theoretical physics, and not only on well established subjects but also on still disputed problems. His seminars and colloquia attracted students and young scholars from far away and made Munich a centre of theoretical physics.

Sommerfeld's first contribution to relativity deals with an objection raised in a discussion by W. Wien (39). It has to do with the fact mentioned above in connexion with the Tcherenkov radiation: in dispersing media the phase velocity of light may be greater than *in vacuo*, in apparent contradiction to relativity. Sommerfeld showed that the velocity of a signal, which an observer with an infinitely sensitive detector would measure, is exactly equal to that *in vacuo*; this first signal then develops to a train of waves, the phases of which may travel faster than waves *in vacuo*, but cannot be used for signalling.

In this work he uses the method of complex integration with a virtuosity which is found in many of his later papers. Five years after the first publication of this result (1909) he gave a detailed account of it (65), followed by a still more elaborate paper by his pupil L. Brillouin (*Ann. Phys.* (4), 44, 177, 203 (1914)).

In 1908 Sommerfeld attended the Congress of Science (Naturforscher-Versammlung) at Cologne and was deeply impressed by Minkowski's lecture in which he gave the first account of his four-dimensional representation of electrodynamics and relativistic mechanics. In the same year Sommerfeld had already started his first course of lectures on relativity, from which several publications emerged: a small one in 1909 (44) on the composition of velocities and two big ones in 1910 (47) on four-dimensional vector algebra and vector analysis. The latter papers have been so thoroughly assimilated by theoretical physicists that few will remember how much of the present technique and terminology of relativity is due to them; for instance, the expressions 'four-vector' and 'six-vector' which Sommerfeld suggested instead of Minkowski's

colourless 'vectors of the first and second kind', further the definition of the differential operators corresponding in ordinary vector analysis to grad, div and curl, and the generalization of the integral theorems of Gauss, Stokes and Green to the four-dimensional case. With the help of these methods Sommerfeld gave a very elegant presentation of the 'hyperbolic motion' of an electron (first treated by myself in 1909), the only accelerated motion for which the field and the reaction of the electron to the field can be rigorously determined. In the same year 1910 Sommerfeld met Einstein personally at the Congress of Science held in Salzburg, an occasion memorable to many of us through the atmosphere of modest triumph of having conquered the obstacles which had prohibited progress of electrodynamics for so many years, mixed with grief because of Minkowski's untimely death.

In the same period (1909) Sommerfeld published a paper on the propagation of the waves used in wireless telegraphy (42), which for a long time was the standard theoretical work on this important subject. The problem consists in determining the electromagnetic field emitted by a dipole source near the plane boundary between two media, one of which at least (earth or sea) is a semiconductor. Sommerfeld shows that the field can be split into two types of waves, space and surface waves, distinguished by the way the energy flow depends on the distance r (r^{-2} and r^{-1} respectively). This paper involved him in a controversy with the mathematician Hermann Weyl who treated the problem by another elegant method (*Ann. Phys.* (5), 60, 481 (1919); 62, 482 (1920)) and insisted that the distinction of space and surface waves does not correspond to physical reality. Sommerfeld retorted (102) by claiming that Weyl's treatment had led to no new results. In fact, Sommerfeld's paper of 1909 is remarkable indeed through the thoroughness of the physical discussion while the mathematical technique in all its complexity appears to be a matter of course. This method, expansion of the solutions into series of Bessel functions of complex arguments and the application of the methods of complex integration, was later (1911) systematically developed in a paper written in collaboration with L. Hopf, on the complex representation of Bessel functions (52).

Another paper, published together with Iris Runge, the daughter of the well-known mathematician and spectroscopist Karl Runge, on the application of vector analysis to geometrical optics (51), is remarkable because it contains a method for deriving ray optics from wave optics which later played a great part in the corresponding problem of the derivation of orbital mechanics from wave mechanics where it is known under the name W.K.B.-method (Wentzel-Kramers-Brillouin).

Quite a different application of Maxwell's equations is concerned with the nature of X-rays. Personal contact with Röntgen, who held the chair of experimental physics at Munich will have directed Sommerfeld's interest to this fascinating problem, full of mysteries. In two papers he treated the intensity distribution of X-rays (45) and γ -rays (50) which, according to observations by J. Stark and others, showed a remarkable angular asymmetry. Sommerfeld followed the suggestion made by Wiechert and Stokes, according to which the

X-rays are produced by the field of a sharply retarded electron. But he was perfectly clear that this 'Bremsstrahlung' was only one part of the total X-ray emission, the other being the characteristic radiation discovered by Barkla. In this paper, which dominated the subject until the appearance of quantum mechanics, the stress is on the physical interpretation, while the mathematics used is quite elementary. Two years later (1912), Sommerfeld made another essential contribution to the then very controversial problem (54), whether X-rays are corpuscular or of the nature of waves. Diffraction experiments with a wedge-like slit, made by Haga and Wind, had given a positive result; but more refined experiments made by Walter and Pohl seemed to show no indication of diffraction. Here the newly invented microphotometer of Koch came to the rescue; from the intensity curves obtained by it Sommerfeld was able to deduce a finite wave-length, more precisely a finite width of the aperiodic disturbance or shock wave. In a second paper (1915) (69) the theory of this type of wave was further developed.

The climax of Sommerfeld's preoccupation with X-rays was reached when in 1912 Max v. Laue approached him with the suggestion that he should investigate the scattering of X-rays by crystals, predicting the interference effect due to the lattice structure. It is Sommerfeld's great merit to have at once seen the fundamental importance of this idea and to have offered to his young colleague the facilities of his institute, including two efficient collaborators, Sommerfeld's assistant Dr Friedrich and Dr Knipping, both trained experimenters.

It is well known how they, directed by v. Laue, found the predicted effect, which was not only decisive for the physics of X-rays, but the foundation stone of the great science of atomic crystallography. Sommerfeld was always rightly proud that this discovery had come from his theoretical department.

The range of Sommerfeld's activities in this fertile period is not exhausted by these different applications of Maxwell's equations. In 1909 he published a paper (41) containing a contribution to the hydrodynamical problem of turbulence where he investigated the stability of laminar motion with the method of small vibrations. A considerable literature has developed from these beginnings; but I do not feel competent to report on it.

In 1911 appeared the first article (53) of Sommerfeld on quantum theory, a subject which dominates all his future work. He entered this central core of modern theory rather late but still in a period when it was hotly controversial. If the distinction between mathematical and theoretical physics has any significance its application to Sommerfeld ranges him decidedly in the mathematical section. His gift was not so much the divination of new fundamental principles from apparently insignificant indications or the daring combination of two different fields of phenomena into a higher unit, but the logical and mathematical penetration of established or problematic theories and the derivation of consequences which might lead to their confirmation or rejection. Yet it is true that in his later, spectroscopic period, he developed a gift for the divining or guessing of mathematical relations from experimental data.

We have an account of Sommerfeld himself, written jointly with his pupil

and later successor F. Bopp, in English (*Science*, 113, 85 (1951)), under the title, 'Fifty years of quantum theory', in which his own contributions appear in their proper historical order and relation to the work of others. It is therefore not necessary to give here a detailed account of Sommerfeld's work on quantum theory, although it is the most important part of his achievement. Only the main points will be mentioned.

In 1913 Sommerfeld, in collaboration with his pupil, P. Debye, published a voluminous paper (57 pages) on the quantum theory of the photoelectric effect (60). It is, judged in the light of our present knowledge, a wild adventure and quite out of date. But it is remarkable because of the change of attitude towards the fundamental conception: instead of Planck's quantum of energy $h\nu$ it is the constant h itself which as 'quantum of action' appears as the centre of the theory. The atom accumulates energy from the incident light until the total action (time integral of the difference of kinetic and potential energy) reaches the value h , when an electron is emitted.

In the same year, 1913, Bohr's famous paper on the quantum theory of the atom appeared. His explanation of the hydrogen line spectrum might also be called a wild adventure, but one which was perfectly successful. Sommerfeld was well acquainted with Rutherford's planetary model of the atom, which he had discussed in his seminar with his pupils and at once grasped the tremendous importance of Bohr's work. The mysterious Balmer formula, the value of the Rydberg constant, the stability of the normal state and many other features appeared as consequences of simple principles connected with Planck's quantum constant h . Sommerfeld tried to generalize these principles so as to apply them to more complicated cases. He and W. Wilson arrived independently and almost simultaneously (in 1915) at a generalization of Bohr's quantum rule, according to which the angular momentum is a multiple of $h/2\pi$, by establishing that the same holds of the phase integrals whenever a separation of variables in conjugate pairs is possible. Thus new quantum numbers could be introduced which lead to a great number of important results. In a large paper, published in 1915 (75, 76), he investigated the elliptic motion of the electron and found that there are actually three quantum numbers connected with it which, however, for an 'undisturbed' atom combine to one number, that appearing in Balmer's formula. But by exposing the atoms to perturbations the effect of these three numbers can be separated. Thus the splitting of spectral lines by magnetic and electric fields, the Zeeman- and Stark-effect, were explained (80). In the magnetic case the different energy levels correspond to precessional motions of the plane of the elliptic orbit at different inclinations to the direction of the field. This phenomenon, known under the name quantization of direction, was soon experimentally confirmed by the famous Stern-Gerlach experiment, where a beam of silver atoms deflected in an inhomogeneous field was split up into a number of separate components. This investigation was the beginning of a great development which aimed at the direct determination of spectral terms (instead of spectral lines, which are term differences) and culminated in the well-known work of Stern and Rabi on nuclear spin.

Sommerfeld's second quantum number, called the azimuthal number, was of equal importance. In the same series of papers of 1915–1916 (75, 76, 79, 80, 81, 82, 83, 84), he considered the splitting of the Balmer terms produced by the relativistic variability of the mass with velocity and obtained a formula for the fine structure of the hydrogen-like (one-electron) spectra which was strikingly confirmed by Paschen's measurements on ionized helium. This formula was re-established later from the standpoint of Dirac's wave equation of the spinning electron and was generally considered to be one of the few lasting achievements of theoretical physics. Only recently modern experimental technique has revealed that even this result was not final; Lamb and Retherford discovered small deviations from the calculated fine structure, and it has turned out that these are of a fundamental nature and can only be explained with the help of modern quantum electrodynamics. One conception of Sommerfeld, however, has survived: the fine structure constant $\alpha = 2\pi e^2/hc = 1/137$ where e is the charge of the electron, c the velocity of light and h Planck's constant—the three quantities characteristic for the main ideas of modern physics, electrons, relativity and quantum theory. It is a dimensionless combination of these constants and the only one possible. Strangely enough it seems not to have been noticed before it appeared in Sommerfeld's formula. Its importance lies in the fact that it shows clearly an intimate connexion between elementary charge and quantum, for which present theory can offer no explanation. Many attempts have been made to derive the numerical value of α , the most conspicuous by Eddington (who contended that $1/\alpha - 1 = 136$ is the value of $\frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)$ for $n = 4$). Thus Sommerfeld's discovery indicates one of the most fundamental problems for the future of physics.

To return to the papers of 1916, they contain numerous other applications of the new quantum rules. The counterpart of the fine structure in non-hydrogenic spectra (alkali atoms) is found in the separation into principal and subordinate series. The selection rules, which regulate the transitions between electronic states and thus the appearance of spectral lines, are formulated.

The third paper of this tremendous series contains the application of Sommerfeld's theory to X-rays. Based on the fundamental discoveries of Siegbahn and Moseley a complete analysis of the complex X-ray spectra is made and expressed in terms of Bohr's principles. These results have remained the backbone of the theory of X-rays.

In 1920 (103) Sommerfeld introduced a new quantum number, in order to explain the appearance of doublets and triplets (discovered by Rydberg); he gave it the name inner quantum number which, however, turned out to be unfortunate. There was actually no room in Bohr's model for a further quantum number, and its existence was a mystery, until Uhlenbeck and Goudsmit suggested the 'spinning electron' which has one additional degree of freedom. Sommerfeld's number was then found to be the total angular momentum (orbital plus spin), hence nothing 'internal'.

This series of papers made Sommerfeld at once the leading theoretical spectroscopist, who had brought order and sense into a meaningless chaos. He

continued to work on spectral laws with great success. Some of his main results may be mentioned: In collaboration with Kossel he published the spectroscopic displacement law (94), which states that the spark spectrum of an element (that is the spectrum of its ion) has the same structure as the arc spectrum of the previous (neutral) atom. Together with his pupils Heisenberg (114, 115) and Hönl (134) he studied the multiplets of more complicated atoms; by analyzing the experimental results of M. A. Catalan and A. Fowler they succeeded in guessing the correct formula. With the help of his inner quantum number he disentangled the anomalous Zeeman effect and obtained a derivation of a formula, previously given by W. Voigt (112), from the principles of quantum mechanics.

All these achievements were collected in his famous book *Atombau und Spectrallinien* which became the standard work on theoretical spectroscopy. Its six editions reflect the whole development of this branch of physics between 1916 and 1946. It seems as if Sommerfeld, immersed in the empirical facts and their interpretation in terms of quantum numbers was not so much troubled by the inconsistencies and inadequacies of the current quantum theory. He did not take part in its overthrow; but when quantum mechanics became known he accepted it enthusiastically. It was, of course, Schrödinger's form of the new theory, with its wave equation and eigenvalue problems, which attracted him most, as it fitted exactly into the investigations on partial differential equations which had interested him since his early mathematical period. He assimilated the new methods and applied his extraordinary mathematical skill to many problems. All these are collected in a supplementary volume to his *Atombau*, which first appeared as a thin booklet but was later extended into a full-grown textbook. These two volumes of Sommerfeld's *Atombau* have probably contributed more than any other book to make the new methods familiar to the physicist. They contain brilliant presentations of the physical facts and their mathematical interpretation, but very little about the fundamental epistemological and metaphysical questions connected with quantum mechanics. This aspect of the matter was not in Sommerfeld's line.

But he made an essential and original contribution to quantum mechanics in a field which previously he had never touched, namely the electronic theory of metals (151, 153, 154, 168). He was well acquainted with the work of his friend P. Drude, with its successes and shortcomings, and he discovered the remedy for the latter in the application of wave mechanics combined with Pauli's exclusion principle and Fermi's statistics. From simple beginnings an imposing structure is erected, which accounts for all essential properties of metals in a qualitative and often quantitative way. This tremendous work is presented in an article, written in collaboration with his pupil H. Bethe, for the *Handbuch der Physik*. Sommerfeld's theory of metals, which also comprised semiconductors, has to-day grown into one of the main branches of theoretical physics.

In the course of this account of Sommerfeld's scientific production the names of some of his pupils were mentioned as collaborators in joint publications, young students or budding scholars then, well-known physicists to-day.

In fact, Sommerfeld's school was extremely fertile in producing men of the highest standard. Peter Debye, who was his assistant in Aachen and moved with him to Munich, opened the list. Particularly fertile were the years 1920–1922 when Wolfgang Pauli and Werner Heisenberg appeared, each of them a sort of child prodigy who started with an erudition which others acquired only after the whole course. It would be easier to compile a list of prominent theoretical physicists who were not Sommerfeld's pupils than of those who were. He himself has published in America reminiscences of his teaching career (271) which contains the names of a large number of well-known physicists, most of whom now occupy chairs in U.S.A. A long list of Germans and others could be easily added. The secret of his influence was not only the well organized teaching, the brilliant lectures and the seminars, but his personal charm and the interest he took in the young men. A graduate zoologist who by chance attended one of Sommerfeld's lectures gave up his subject and became a theoretical physicist (now my successor in Göttingen). There was some kind of exchange between Sommerfeld's and my own school; I remember a few cases when he succeeded in putting a young man on his feet where I had failed. Theoretical physics is a subject which attracts youngsters with a philosophical mind who speculate about the highest principles without sufficient foundations. It was just this type of beginner which he knew how to handle, leading them step by step to a realization of their lack of actual knowledge and providing them with the skill necessary for fertile research. His method was personal instruction, like the tutoring at the old British Universities, but less methodical and formal. He had the rare ability to have time to spare for his pupils, in spite of all his duties and his scientific work. Often before or after the Colloquium he was seen at the Hofgarten-Café discussing problems with some collaborators and covering the marble tables with formulae. It is reported that one day an integral resisted all attempts at reduction and was left unfinished on the table; the next day Sommerfeld, returning to the same table, found the solution written under the problem, obviously meanwhile worked out by another mathematician taking his cup of coffee with greater leisure.

In this friendly and informal way of teaching a great part was played by invitations to join a ski-ing party on the 'Sudelfeld' two hours by rail from Munich. There he and his mechanic Selmayr, the inventor and builder of ingenious models of crystal structures, were joint owners of a ski-hut. In the evenings, when the simple meal was cooked, the dishes washed, the weather and snow properly discussed, the talk invariably turned to mathematical physics, and this was the occasion for the receptive students to learn the master's inner thoughts.

The ordinary course of Sommerfeld's lectures covered six semesters (three years) and dealt essentially with classical physics, mechanics, electromagnetism, thermodynamics, ending with a general review of mathematical methods. They are now available as a publication in six volumes, already quoted several times. Apart from this introductory course he offered special lectures on modern subjects; as far as I know, there is no published record of these, apart from the

book *Atombau und Spektrallinien*, mentioned already, which certainly is a condensation of a number of such lectures.

Sommerfeld's quiet life at Munich was interrupted by several long journeys. In 1922–1923 he was at Madison (Wisconsin) as Carl-Schurz professor where he met and became the friend of many distinguished American physicists. In 1926 he visited this country and lectured at Oxford, Cambridge, Edinburgh and Manchester. In 1928–1929 he sailed around the world, lecturing at Pasadena (Calif.) and at different places in Japan and India. In the following years he visited Hungary, Russia, France, Italy and again U.S.A. where he stayed for a while in Chicago.

He received a great number of distinctions, honorary doctor's degrees in medicine (Rostock), engineering (Aachen), science (Calcutta, Athens), orders and medals, e.g. the Lorentz gold medal, the Planck Medal, the Oersted Medal, and he was a member (fellow, honorary member) of numerous learned societies: Royal Society of London, National Academy of Washington, the academies of Berlin, Munich, Vienna, Göttingen, Budapest, Uppsala, Madrid, Academia dei Lincei of Rome, Academy of U.S.S.R. in Moscow, Indian Academy of Science in Bangalore, the leading physical societies in many European and American countries.

Sommerfeld was married in 1897 to Johanna Höpfner, daughter of the Kurator Dr Ernst Höpfner of Göttingen University. He had three sons and a daughter, of whom all but one son survived him.

Sommerfeld's age was under the shadow of the political catastrophe due to Hitler. He had watched with apprehension the increasing fanaticism of the nationalistic students. In 1935 he reached the age limit of sixty-seven and had formally to retire; but no successor was appointed and he was asked to continue his teaching. In 1940 he was followed by a man from the Nazi ranks, whom he himself has called the 'worst possible successor'. His famous school came to an end. But he preserved his equanimity and showed no traces of bitterness, even if he was forbidden to enter his own institute. After the war that usurper disappeared and a worthy successor was appointed.

Sommerfeld spent his time during these last years in preparing his lectures for publication. He was busy with the fifth volume, dealing with the theory of heat, when he was the victim of a street accident, and died after severe sufferings on 26 April 1951. This last volume will be finished and published by two of his pupils, and crown the monumental work of the great scholar and teacher.

MAX BORN

BIBLIOGRAPHY

- (1) 1891. Die willkürliche Funktion in der mathematischen Physik, Dissertation. Königsberg (Preussen).
- (2) 1892. Über eine neue Integriermaschine 1891. *Ber. Physik-ökonom Ges. Königsberg and Katalog math. Modelle und Apparate, München*.
- (3) 1892. Mechanische Darstellung der elektromagnetischen Erscheinungen in ruhenden Körpern. *Ann. Phys. Lpz.* 46, 139.
- (4) 1894. Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung. *Math. Ann.* 45, 263.
- (5) 1894. Zur mathematischen Theorie der Beugungserscheinungen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, p. 338.
- (6) 1895. Zur Integration der partiellen Differentialgleichung $\Delta v + k^2 v = 0$ auf Riemann'schen Flächen. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, p. 267.
- (6a) 1895. Diffractionsprobleme in exacter Behandlung. *Dtsch. Nat. Verh.* 2, 34; *Jber. dtsh. MatVer.* 4, 172.
- (7) 1896. Mathematische Theorie der Diffraction. *Math. Ann.* 47, 317.
- (8) 1897. Über verzweigte Potentiale im Raum. *Proc. Lond. Math. Soc.* 28, 395.
- (9) 1897. Geometrischer Beweis des Dupinschen Theorems und seiner Umkehr. *Jber. dtsh. Math. Ver.* p. 123.
- (10) 1898. Über die numerische Auflösung transcender Gleichungen durch successive Approx. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, Heft 4, p. 1.
- (11) 1898. Bemerkungen, zum Hess'schen Fall der Kreiselbewegung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, p. 83.
- (12) 1899. v. Lilienthal. Grundlagen einer Theorie der Kurvenscharen. *Gött. Gelehrtenanzeiger*, p. 902. (Review.)
- (13) 1899. Über das Problem der elektrischen Drahtwellen. *Jber. dtsh. Math.* p. 112.
- (14) 1899. Über die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs eines Drahtes. *Ann. Phys. Lpz.* 67, 233.
- (15) 1900. Bemerkungen zur Variationsrechnung. *Jber. dtsh. MatVer.* p. 188.
- (16) 1900. Randwertaufg. in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. *Enzykl. Math. Wiss.* II, p. 504.
- (17) 1900. Theoretisches über die Beugung der Röntgenstrahlen. *Phys. Z.* 1, 105 and 2, 55.
- (18) 1901. Theoretisches über die Beugung der Röntgenstrahlen. *Z. Math. Phys.* 46, 11.
- (19) 1901–1902. Beiträge Zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre. *Aachener Bez.-Ver. dtsh. Ing.* 1901, p. 226; *Phys. Z.* 1902, p. 266.
- (20) 1902. Standpunkt der Fernwirkung. Die Elementargesetze. *Enzykl. Math. Wiss.* V, 12, 1; and French translation.
- (21) 1902. Zur Theorie der Eisenbahnbremsen. *Denkschr. Düsseldorfer Ausstellung*, p. 58.
- (22) 1903. Die naturwissenschaftlichen Ergebnisse und die Ziele der modernen technischen Mechanik. *Phys. Z.* p. 733. The scientific results and aims of modern applied mechanics. *Math. Gaz.*
- (23) 1904. Zur hydrodynamischen Theorie der Schmiermittelreibung. *Z. Math. Phys.* 50, 97.
- (24) 1904. Das Pendeln parallel geschalteter Wechselstrommaschinen. *Elektrotech. Z.* 50, Heft 14–15, p. 1.
- (25) 1904. Eine bes. anschauliche Ableitung des Gauss'schen Fehlergesetzes. *Boltzmann-Festschrift*, p. 846.
- (26) 1904. (With R. REIFF.) Die elektr. Elementargesetze. *Enzykl. Math. Wiss.* II, 5, 4.
- (27) 1904. Benennung und Bezeichnung der elektr. Größen *Phys. Z.* 5, 467.

- (28) 1904. Über das Wechselfeld und den Wechselstromwiderstand von Spulen. *Ann. Phys. Lpz.* 5, 673.
- (29) 1904. Simplified deduction of the field and the forces of an electron, moving in a given way. *Proc. Amst. Acad.* 7, 346; (also in Dutch).
- (30) 1904. Über die Mechanik der Elektronen. *Int. Math. Congr.* p. 417.
- (31) 1904–1905. Zur Elektronentheorie, I, II, III. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, p. 99; p. 363.
- (32) 1905. Eine einfache Vorrichtung zur Veranschaulichung des Knickungsvorganges. *Z. Ver. dtsh. Ing.* p. 1.
- (33) 1905. Lissajous-Figuren und Resonanzwirkungen bei schwingenden Schraubenselbstzentrierung schwanker Wellen. (Only in MS.)
- (34) 1905. Vorführung eines Apparates zur Darstellung des Schleuderns und der Selbstzentrierung schwanker Wellen. (Only in MS.)
- (35) 1906. Bemerkungen zur Elektronentheorie. *Jber. dtsh. MatVer.* p. 51.
- (36) 1906. Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen. *Z. Ver. dtsh. Ing.* 50, 1104; *Z. Math. Phys.* 54, 113, 313.
- (37) 1907. Über die Bewegung der Elektronen. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* 37, Heft 2, 155.
- (38) 1907. Über den Wechselstromwiderstand der Spulen. *Phys. Z.* 6, 805; *Ann. Phys. Lpz.* 24, 609.
- (39) 1907. Ein Einwand gegen die Relativitätstheorie und seine Beseitigung. *Verh. dtsh. Phys. Ges.* 9, 641.
- (40) 1908. Über Ebbe und Flut. Vortrag 1908, *Bayer. Ind. u. Gewerbeblatt*, 1.
- (41) 1909. Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung. *4th Int. Math. Congr. Rome*, 3, 116.
- (42) 1909. Über die Ausbreitung elektrischer Wellen, in der drahtlosen Telegraphie. *Ann. Phys. Lpz.* 28, 665; *S. B. Bayer Akad. Wiss.* p. 1.
- (43) 1909. H. Minkowski, Grundgl. f. d. elektromagn. Vorgänge in bewegten Körpern. Beibl. zu *Ann. Phys. Lpz.* p. 809 (Review).
- (44) 1909. Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie. *Phys. Z.* 10, 826; *Verh. dtsh. Phys. Ges.* 11, 577.
- (45) 1909–1910. Über die Verteilung der Intensität bei der Emission der Röntgenstrahlen. *Phys. Z.* 10, 969; 11, 99.
- (46) 1910. Compatibilitätsbedingungen. *Ann. Phys. Lpz.* 31, 443.
- (47) 1910. Zur Relativitätstheorie, Vierdimensionale Vektoralgebra. I. *Ann. Phys. Lpz.* 32, 749; II. *Ann. Phys. Lpz.* 33, 649.
- (48) 1910. Greensche Funktion für eine beliebiges Gebiet. *Phys. Z.* 11, 1057.
- (49) 1910. Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. Einfluss der Bodenbeschaffenheit auf gerichtete und ungerichtete Wellenzüge. *Jb. drahtl. Telegr.* 4, 157.
- (50) 1911. Über die Struktur der γ -Strahlen. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* p. 1.
- (51) 1911. (With I. RUNGE.) Anwendung der Vektorrechnung auf die Grundlagen der geometrischen Optik. *Ann. Phys. Lpz.* 35, 277.
- (52) 1911. (With L. HOFF.) Über die komplexe Darstellung der Zylinderfunktionen. *Arch. Math. Phys.* 3, Heft I, 1.
- (53) 1911. Das Plancksche Wirkungsquantum und seine allgemeine Bedeutung für die Molekularphysik. *Phys. Z.* 12, 1057.
- (54) 1912. Über die Beugung der Röntgenstrahlen. *Ann. Phys. Lpz.* 38, 473.
- (55) 1912. Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien. p. 338 *Festschrift, Heinrich Weber zu seinem 70. Geburtstag am 5 März 1912, gewidmet von Freunden und Schülern.* Leipzig and Berlin: B. G. Teubner.
- (56) 1912. Sur l'application de la Théorie de l'élément d'action aux phénomènes moléculaires non périodiques. *Paris: Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire.*
- (57) 1913. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. *Jber. dtsh. MatVer.* 21, 309.

- (58) 1913. (With O. FRANK.) Die Deformationen der Segmentmembranen. *Z. Biologie* **61**, 264.
- (59) 1913. Der Zeeman-Effekt eines anisotrop gebundenen Elektrons und die Beobachtungen von Paschen-Back. *Ann. Phys. Lpz.* **40**, 748.
- (60) 1913. Theorie des lichtelektrischen Effektes vom Standpunkt des Wirkungsquantums. *Ann. Phys. Lpz.* **41**, 873.
- (61) 1913. Hermann Ebert. *Nekrolog. Bayer. Akad.* p. 73.
- (62) 1913. Probleme der freien Weglänge. Gött. Vortrag. *Math. Vorles. Göttingen*, p. 125.
- (63) 1914. Unsere gegenwärtigen Auschauungen über Röntgenstrahlen. Vortrag. *Unterricht. Math. Naturw.* p. 1.
- (64) 1914. Zur Voigtschen Theorie des Zeeman-Effektes. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, p. 1.
- (65) 1914. Über die Fortpflanzung des Lichtes in dispergierenden Medien. *Ann. Phys. Lpz.* **44**, 177.
- (66) 1914. Zur Theorie der Schmiermittelreibung. *Arch. Elektr.* **3**, 1.
- (67) 1914. Bidlingmayer, Nekrolog. Württembergische Nekrologe für das Jahr. *Komm. f. Landesgeschichte*, p. 179.
- (68) 1914–1915. Zur Theorie der Lichtbogenschwingungen bei Wechselstrombetrieb. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.*, p. 261; *Jb. drahtl. Telegr.* p. 201.
- (69) 1915. Über das Spektrum der Röntgenstrahlen. *Ann. Phys. Lpz.* **46**, 721.
- (70) 1915. Zu Röntgens siebzigstem Geburtstag. *Dtsch. Rev.* p. 85.
- (71) 1915. Die allgemeine Dispersionsformel nach dem Bohrschen Modell. *Arbeiten aus den Gebieten der Phys. Math. Chemie, Vieweg-Braunschweig*, p. 549.
- (72) 1915. Minkowski, Relativitätsprinzip. (Review.)
- (73) 1915. Dynamik der Kristallgitter. *Naturwissenschaften*, p. 669. (Review.)
- (74) 1915. Zur Theorie der Balmerschen Serie. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* p. 425.
- (75) 1915. Die Feinstruktur der Wasserstoff-ähnlichen Linien. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* p. 459.
- (76) 1916. Die Physik der Röntgenstrahlen. *München. Med. Wochenschr.* p. 458. *Nat. u. Kult.* **13**, 193.
- (77) 1916. Die medizinischen Röntgenbilder im Licht der Method. Kristallinterferenzen. *Strahlenth.* **7**, 33; *Med. Wochenschr.* p. 33.
- (78) 1916. K. Schwarzschild. *Naturwissenschaften*, **4**, 1. (Obit.)
- (79) 1916. Zur Quantentheorie der Spektrallinien. *Ann. Phys. Lpz.* **51**, 1, 125.
- (80) 1916. Zur Theorie des Zeemaneffektes der Wasserstofflinien, mit einem Anhang über die Starkeffekte. *Phys. Z.* **17**, 491.
- (81) 1916. Die Quantentheorie der Spektrallinien und die letzte Arbeit von K. Schwarzschild. *Deutsch Umschau*, **22**, 941.
- (82) 1916. Die neueren Fortschritte in der Physik der Röntgenstrahlen. *Naturwissenschaften*, **4**, 1 and **4**, 2, 13.
- (83) 1916. Zur Quantentheorie der Spektrallinien, Ergänzungen and Erweiterungen. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* p. 131.
- (84) 1917. Zur Quantentheorie der Spektrallinien, Intensitätsfragen. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* p. 83.
- (85) 1917. Der innere Aufbau des chemischen Atoms und seine Erforschung. *Z. Ver. dtsh. Ing.* p. 1.
- (86) 1917. Zum Andenken an Marian Smoluchowski. *Phys. Z.* **18**, 533. (Obit.)
- (87) 1917. Die Drudesche Dispersionstheorie vom Standpunkte des Bohrschen Modells, und die Konst. des H_2O_2 und N_2 . *Ann. Phys. Lpz.* **53**, 497.
- (88) 1917. Goethes Farbenlehre im Urteil der Zeit. *Dtsch. Rev. Juli*. p. 100.
- (89) 1918. Max Planck zum 60. Geburtstage. *Naturwissenschaften*, **17**, 195.
- (90) 1918. Besuch an der Universität Gent. *Mth. naturw. Unterr.* p. 57.
- (91) 1918. Atombau und Röntgenspektren. I. *Phys. Z.* **19**, 195.
- (92) 1918. Entwicklung der Physik in Deutschland. *Dtsch. Rev.* p. 122.
- (93) 1918. Über der Feinstruktur der $K\beta$ -Linie. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* p. 367,

- (94) 1919. (With W. KOSEL.) Auswahlprinzip und Verschiebungssatz bei Serienspektren. *Verh. Phys. Ges.* p. 240.
- (95) 1919. Zu Kleins 70. Geburtstag. *Naturwissenschaften*, **7**, 300.
- (96) 1920. Ein Zahlenmysterium in der Theorie des Zeeman-Effektes. *Naturwissenschaften*, **8**, 61.
- (97) 1920. Über einige spektroskopische Arbeiten Goldsteins. *Naturwissenschaften*, **8**, 723.
- (98) 1920. Bemerkungen zur Feinstruktur der Röntgenspektren I. *Z. Phys.* **1**, 135.
- (99) 1920. Eine einheitliche Auffassung des Balmerschen and Deslandresschen Termes. *Arch. Mah.* **15**, 1.
- (100) 1920. Relativitätstheorie. München. med. Wochenschr. **44**, 1268. *Arch. Math.* **15**, 1268.
- (101) 1920. Schwebende Fragen der Atomphysik. *Phys. Z.* **21**, 619.
- (102) 1920. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. *Ann. Phys. Lpz.* **62**, 95.
- (103) 1920. Allgemeine spektroskopische Gesetze, insbes. ein magnetooptischer Zerlegungssatz. *Ann. Phys. Lpz.* **63**, 121.
- (104) 1921. Zur Theorie der Schmiermittelreibung. *Z. Tech. Phys.* **2**, 58.
- (105) 1921. Über den Starkeffekt zweiter Ordnung. *Ann. Phys. Lpz.* **65**, 36.
- (106) 1921. Bemerkungen zur Feinstruktur der Röntgenspektren. II. *Z. Phys.* **51**, 1.
- (107) 1921. Zur Kritik der Bohrschen Theorie der Lichtemission. *Jber. f. Rad.*
- (108) 1921. (With G. WENTZEL.) Reguläre und irreguläre Dubletts. *Z. Phys.* **7**, 86.
- (109) 1921. Fünfundzwanzig Jahre Zeeman-Effekt. *Naturwissenschaften*, **9**, 911.
- (110) 1921. Kurzer Bericht über die allgemeine Relativitätstheorie. *Arch. Elektrotech.* **9**, 391.
- (111) 1922. Atomistik. *Z. Ver. dtsh. Ing.* **66**, 149.
- (112) 1922. Quantentheoretische Umdeutung der Voigtschen Theorie des anomalen Zeeman-Effektes vom D-Linientypus. *Z. Phys.* **8**, 257.
- (113) 1922. Relativitätstheorie. *Volkverb. d. Bücherfreunde.*
- (114) 1922. (With W. HEISENBERG.) Bemerkungen über relativische Röntgendubletts und Linienschärfe. *Z. Phys.* **10**, 393.
- (115) 1922. (With W. HEISENBERG.) Die Intensität der Mehrfachlinien und ihre Zeeman-Komponenten. *Z. Phys.* **11**, 131.
- (116) 1923. Über die Deutung verwickelter Spektren nach der Methode der Inneren Quantenzahlen. *Ann. Phys. Lpz.* **70**, 32.
- (117) 1923. Note on Brewster's law. *J. Opt. Soc. Amer. and Rev. Sci. Instrum.* **7**, 501.
- (118) 1923. The model of the neutral helium atom. *J. Opt. Soc. Amer. and Rev. Sci. Instrum.* **7**, 509.
- (119) 1923. Regularities in the screening constants of Röntgen spectra. *J. Opt. Soc. Amer. and Rev. Sci. Instrum.* **7**, 503.
- (120) 1923. Coupled oscillations of a Helical spring. *Opt. J.* **7**, 529.
- (121) 1923. Spektroskopische Magnetonenzahlen. *Phys. Z.* **24**, 360.
- (122) 1923. Zur Theorie des Magnetons. *Z. Phys.* **19**, 221.
- (123) 1923. Abraham Nekrolog. *Dtsch. biographisches Jahrb.* p. 404.
- (124) 1924. Die Erforschung des Atoms. *Strahlentherapie*, **16**, 873.
- (125) 1924. Grundlagen der Quantentheorie und des Bohrschen Atommodells. Innsbrucker Vortrag. *Naturwissenschaften*, **12**, 1.
- (126) 1924. Über die Struktur des Eisenspektrums. Vortrag. *Physica, Eindhoven* **4**, 115.
- (127) 1924. Ewald, Kristalle und Röntgenstrahlen. *Dtsch. Lit.* **6**, 458. (Review.)
- (128) 1925. (With G. WENTZEL.) Anwendung der Quantentheorie auf die Physik der Atome. *Jber. Radiol.* **6**, 189.
- (129) 1924. Zur Theorie der Multipletts und ihrer Zeeman-Effekte. *Ann. Phys. Lpz.* **73**, 209.
- (130) 1925. Über die Intensität der Spektrallinien. *Z. tech. Phys.* **5**, 2.
- (131) 1925. Über die Intensität der Röntgenlinien. *Ann. Phys. Lpz.* **76**, 284.

- (132) 1925. Bedeutung der Röntgenstrahlen für die heutige Naturerkenntnis. Kieler Vortrag. *Forsch. Fortsch. dtsh. Wiss.* 1, 34.
- (133) 1925. Zur Theorie des periodischen Systems. *Phys. Z.* 26, 70.
- (134) 1925. (With H. HÖNL.) Über die Intensität der Multiplettlinien. *S. B. Berl. Akad.* p. 141.
- (135) 1925. Die Bedeutung der Röntgenstrahlen für die heutige Physik. *S. B. München. Akad.* 17.
- (136) 1926. Reciprocitätstheorem der drahtlosen Telegraphie. *Jber. drahtl. Telegraphie*, 26, 93.
- (137) 1926. (With H. G. GRIMM.) Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit den chemischen Valenzzahlen. *Z. Phys.* 36, 36.
- (138) 1926. (With A. UNSÖLD.) Über das Spektrum des Wasserstoffes. *Z. Phys.* 36, 259; 38, 237.
- (139) 1926. *Three lectures on atomic physics*. London: Methuen.
- (140) 1926. Atom, Elektron, Ion, Strahlenenergie. *Handb. Strahlenkeilkunde*, 1, 96.
- (141) 1926. Neue Ergebnisse der Atomforschung. *UnterrBl. Math. Naturw.* p. 334.
- (142) 1926. Electronic structure of the atom and the quantum-theory. *Proc. Manch. Litt. Phil. Soc.* 70, 141.
- (143) 1926. (With O. LAPORTE.) Versuch einer spektroskopischen Deutung der Magnetozahlen in der Eisengruppe. *Z. Phys.* 40, 333.
- (144) 1926. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie. *Ann. Phys. Lpz.* 81, 1135.
- (145) 1926. Haas, A. Atomtheorie in elementarer Darstellung. *Dtsch. Literaturzeitung*, p. 33. (Review.)
- (146) 1926. (With O. FRANK.) Physiologische Probleme, welche auf belastete Randwertaufgaben führen. *Proc. Lond. Math. Soc.* p. 135.
- (147) 1927. Zum gegenwärtigen Stande der Atomphysik. *Phys. Z.* 28, 231.
- (148) 1927. Abhandlungen über die hydrodynamische Theorie der Schwermittelreibung von N. Petrow, A. Reynolds, A. Sommerfeld und A. G. M. Mitchell. *Ostwald's Klassiker der exakten Naturwissenschaften*. Band Nr 218. Leipzig: Hopf.
- (149) 1927. (With a reply by PH. LENARD.) Über Kathoden- und Röntgenstrahlen. *München. Med. Wochschr.* p. 640.
- (150) 1927. Über die Theorie des periodischen Systems und die Entwicklung der Wellenmechanik. *Z. angew. Chem.* 41, 1.
- (151) 1927-1928. Zur Elektronentheorie der Metalle. I. *Naturwissenschaften*, 15, 825; 16, 374.
- (152) 1928. Asymptotische Darstellung von Formeln aus der Beugungstheorie des Lichtes. *J. angew. Math. Mech.* 158, 199.
- (153) 1928. (With W. v. HOUSTEN & C. ECKART.) Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik. *Z. Phys.* 47, 1.
- (154) 1928. Zur Elektronentheorie der Metalle nach der wellenmechanischen Statistik, insbes. Voltaeffekt. *Ber. dtsh. chem. Ges.* 61, 1171.
- (155) 1928. Zur Frage nach der Bedeutung der Atommodelle. *Z. Elektrochem.* 34, 426.
- (156) 1928. Ehrung Röntgens. *Fortschr. Röntgenstr.* 38, 578.
- (157) 1928-1929. Nekrologe: A. Schönflies. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* p. 86; W. Wien. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* p. 79; Lorentz. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* p. 84.
- (158) 1928. Entwicklung der Atomphysik in den letzten 20 Jahren. *Jap.-Deutscher Geistesaut.* p. 1.
- (159) 1929. Indische Reiseindrücke. *Zeitwende*, 5, 289.
- (160) 1929. Bemerkungen zu Grunerts Arbeit: Bemerkungen zu Sommerfeld's Elektronentheorie der Metalle. *Helv. Phys. Acta.* p. 509.
- (161) 1929. Einige grundsätzliche Bemerkungen zur Wellenmechanik. *Phys. Z.* 30, 866.
- (162) 1929. Über die Anfänge der Quantentheorie von mehreren Freiheitsgraden. *Naturwissenschaften*, 17, 481.

- (163) 1929. On the production of X-radiation according to wave mechanics. *J. Franklin Inst.* 208, 571.
- (164) 1929. About the production of the continuous X-ray spectrum. *Proc. Nat. Acad. Sci. Wash.* 15, 393.
- (165) 1930. Über den Photoeffekt in der K-Schale der Atome, insbes. Voreilung. *Ann. Phys. Lpz.* 6, 409.
- (166) 1930. Über die Elektronentheorie der Metalle. *Forsch. Fortsch. dtsh. Wiss.* 6, 405.
- (167) 1930. Über die Hauptabschnitte eines polydimensionalen Würfels. *Bull. Calcutta Math. Soc.* 20, 221.
- (168) 1930. Die Elektronentheorie der Metalle nach der wellenmechanischen Statistik. *Z. Ver. dtsh. Ing.* 74, 585.
- (169) 1930. Erwiderung auf die Angriffe von Herrn J. Stark. *Ann. Phys. Lpz.* 6, 716; 6, 365; 7, 889.
- (170) 1930. Über Anschaulichkeit in der modernen Physik. *UnterrBl. Math. Phys.* 36, 161; desgl. *Scientia*, p. 81.
- (171) 1930. Über die Elektronentheorie der Metalle. Vortrag *Monatsh. Math. Phys.* 37, 1.
- (172) 1930. Über die paramagnetischen Momente der seltenen Erden. *S. B. Akad. Wiss. Wien.* p. 11.
- (173) 1931. (With K. GLITSCHER.) Hermann Anschütz-Kaempfe. *Z. Ver. dtsh. Ing.* 75, 1127.
- (174) 1931. (With W. GERLACH.) Hermann Anschütz-Kaempfe. *Naturwissenschaften*, 19, 666.
- (175) 1931. Angular distribution of photoelektrons. *Phys. Rev.* 38, 1078.
- (176) 1931. Bohr, Atomtheorie und Naturbeschreibung. *Dtsch. Literaturzeitung*, p. 2105. (Review.)
- (177) 1931. (With K. BECHERT.) Über die wellenmechanische Deutung der chemischen Valenz. *Z. Ver. dtsh. Ing.* 75, 1019.
- (178) 1931. (With F. KIRCHNER.) Über die Wellennatur der Materie. *München. Med. Wschr.* p. 1348.
- (179) 1931. Sur quelques problèmes de la mécanique ondulatoire. *Ann. Inst. Poincaré*, p. 1.
- (180) 1931. (With N. H. FRANK.) Statistical theory of thermoelectric Galvano- and thermomagnetic phenomena in metals. *Rev. Mod. Phys.* 3, 1.
- (181) 1931. Über die Beugung und Bremsung der Elektronen. *Ann. Phys. Lpz.* 11, 257.
- (182) 1931. Das Reziprozitätstheorem in der drahtlosen Telegraphie. *Jb. drahtl. Telegr.* 37, 167.
- (183) 1931. (With W. GERLACH.) Zur Jahrhundertfeier Faraday-Maxwell. *Metallwirtsch. Metallwiss.* 10, 767.
- (184) 1932. Zur Erinnerung an Heinrich Hertz. *Metallwirtsch. Metallwiss.* 11, 119.
- (185) 1932. Das Spektrum der Röntgenstrahlen als Beispiel für die Methodik der alten und neuen Mechanik. *Scientia*, p. 41.
- (186) 1932. Zu Robert Emdens 70. Geburtstag. *Naturwissenschaften*, 20, 161.
- (187) 1932. Conductibilité électrique. Thermoélectricité. *Congres. int. Paris.* Juli, p. 1.
- (188) 1932. Brillouin Léon, Die Quantenstatistik und ihre Anwendung auf die Elektronentheorie der Metalle. *Naturwissenschaften*, 20, 542. (Review.)
- (189) 1932. Integrazione asintotica dell'equazione differenziale di Thomas-Fermi. *R. C. Acad. Lincei*, 15, 788.
- (190) 1932. Über der Packungseffekt und eine vereinfachte Ableitung des Thomas-Faktors. *R. C. Acad. Lincei*, 15, 706, 788.
- (191) 1932. *Wissenschaft an der Wende*. Gartenlaube. 39, 773.
- (192) 1932. Asymptot. Integr. d. Diffgl. d. Thomas Fermi-Atoms. *Z. Phys.* 78, 283.
- (193) 1933. Über die höheren Ionisierungsspannungen der Atome in Thomas-Fermischen Modell. *Z. Phys.* 80, 415.
- (194) 1933. Wege zur physikalischen Erkenntnis. 75 Geburtstag von Planck. *Metallwirtsch. Metallwiss.* 12, 225.
- (195) 1933. Born-Sauter, Moderne Physik. *Metallkunde*, 13, 24. (Review.)

- (196) 1934. Zur Elektronentheorie der Metalle. *Naturwissenschaften*, **22**, 49.
 (197) 1934. Concerning the thermoelectric effects of the alkalis. *Phys. Rev.* **45**, 65.
 (198) 1934. Handbuch-Artikel Sommerfeld-Bethe. 2. Aufl. **24**, 2. Elektronentheorie der Metalle.
 (199) 1934. Mott and Massey. Theory of collisions. *Naturwissenschaften*, **22**, 527. (Review.)
 (200) 1934. (With O. SCHERZER.) Über das Elektronen-Mikroskop. *München. Med. Wschr.* **48**, 1859.
 (201) 1934. Berechnung der Richardson'schen Austrittsarbeit nach einer Methode von O. Scherzer. *Helv. Phys. Acta*, p. 31.
 (202) 1935. Grimsehl's Lehrbuch der Physik. *Naturwissenschaften*, **23**, 71. (Review.)
 (203) 1935. Zu Prandtl's 60. Geburtstag. *Z. angew. Math. Mech.* **15**, 7.
 (204) 1935. (With A. W. MAUE.) Verfahren zur näherungsweise Anpassung einer Lösung der Schrödinger- an die Dirac-Gleichung. *Ann. Phys. Lpz.* **22**, 629.
 (205) 1935. Über die Elektromagn. Einheiten. Zeeman-Festschrift. p. 157.
 (206) 1935. Zeeman Festschrift. *Metallwirtsch. Metallwiss.* p. 649. (Review.)
 (207) 1935. (With A. W. MAUE.) Über den Bremsverlust von Kathodenstrahlen beim Auftreffen auf Atomkerne. *Ann. Phys. Lpz.* **23**, 589.
 (208) 1935. Über die Dimensionen der elektromagn. Grössen. *Z. tech. Phys.* **11**, 420; *Phys. Z.* **36**, 894.
 (209) 1935. (With B. W. BARTLETT.) Über die longit. Widerstandsänderung im Magnetfeld nach der element. Theorie. *Phys. Z.* **36**, 894.
 (210) 1936. Max Planck, Die Physik im Kampf um die Weltanschauung. *Phys. Z.* **37**, 144. (Review.)
 (211) 1936. (With E. RÜCHARDT.) Die Entdeckung des Neutrons und der künstlichen Radioaktivität. *München Med. Wschr.* **83**, 28.
 (212) 1936. Ergebnisse d. exakten Naturw. Eddington, New Pathways of Science. *Naturwissenschaften*, **16**, **24**, 253. (Review.)
 (213) 1936. Wege zur physikalischen Erkenntnis. *Scientia*, April, p. 181.
 (214) 1936. Concerning the shape of the Compton Lines. *Phys. Rev.* **50**, 38.
 (215) 1936. Heisenberg, Wandlungen in den Grundlagen der Naturwissenschaften; Röntgens Briefe an Zehnder. *Phys. Z.* **37**, 416. (Review.)
 (216) 1936. Über die Kleinschen Parameter α , β , γ , δ , und ihre Bedeutung für die Dirac-Theorie. *Wien. Ber.* **145**, 639.
 (217) 1937. Atomfysiken har många olösta gåtor. *Svenska Dagbladet*. 19. Jan.
 (218) 1937. Zur Spezif. Wärme d. Metall-Elekt. *Ann. Phys. Lpz.* **28**, 1.
 (219) 1937. X-ray spectroscopy and atomic structure. Current science. 'Laue Diagrams', January, p. 16.
 (220) 1937. Weyrich: Die Zylinderfunktion und ihre Anwendungen. *Phys. Z.* **38**, 427. (Review.)
 (221) 1937. Fröhlich: Elektr. Theorie d. Metalle. *Naturwissenschaften*, **25**, 319. (Review.)
 (222) 1937. Wilson, A. H. Theory of metals. *Naturwissenschaften*, **25**, 495. (Review.)
 (223) 1937. Über die Form der Comptonlinie. I. (II, von W. Franz). *Ann. Phys. Lpz.* **29**, 715.
 (224) 1937. Origins of Cl. Maxwells elektr. ideas. *Naturwissenschaften*, **47**, 766.
 (225) 1937. (With E. RÜCHARDT.) Nachruf Rutherford, Gratulation Millikan, Planck Gedächtnisrede auf Mach. Rede zu Plancks 80. Geburtstag. *München Med. Wschr.* p. 829.
 (226) 1938. Planck, M., Religion u. Naturwissenschaft. *Phys. Z.* **39**, 200. (Reviews.)
 (227) 1938. (With H. WELKER.) Künstl. Grenzbedingungen beim Keplerproblem. *Ann. Phys. Lpz.* **32**, 56.
 (228) 1938. Über einen Zusammenhang zwischen d. Theorie der Planeten und der weissen Zwerge. *Nuovo Cimento*, **15**, 14.
 (229) 1938. Über den metal. Zustand, seine spezif. Wärme und Leitfähigkeit. From *Der feste Körper*, Zürich, Phys. Ges. 50 Jahrfeier, Hürzel, p. 124.

- (230) 1939. (With L. WALDMANN.) Die Boltzmann-Statistik und ihre Modifikation durch die Quantentheorie. *Hand- und Jahrd. d. chem. Phys.* Bd. 3, Teil 2, Abschn. III, Leipzig: Akad. Verlag.
 (231) 1939. Über himmlische, irdische und höllische Mechanik. *S. B. Phys.-med. Soz. Erlangen*, **71**, 178.
 (232) 1939. Über die Dimensionen der elektromagn. Grössen. *Ann. Phys. Lpz.* **36**, 335.
 (233) 1940. Bechert-Gerthsen, Atomphysik, Göschen. *Naturwissenschaften*, **28**, 265. (Review.)
 (234) 1940. (With A. HARTMANN.) Künstl. Grenzbedingungen in der Wellenmechanik, der beschränkte Rotator. *Ann. Phys. Lpz.* **37**, 333.
 (235) 1940. Zur Feinstruktur der Wasserstofflinien. Geschichte und gegenwärtiger Stand der Theorie. *Naturwissenschaften*, **28**, 417.
 (236) 1940. Der Ursprung der Sonnenwärme. *Umschau*, **44**, 513.
 (237) 1940. Pohl. W., Einführung in die Optik. *Naturwissenschaften*, **28**, 726. (Review.)
 (238) 1940. Über die Fourieranalyse der Kristalle und die Dichte der Metallelektronen. *Naturw.* **28**, 51 and Ital. translation.
 (239) 1940. A. v. HALLERALS. Vorläufer des Prinzips von der Erhaltung der Energie. *München Med. Wschr.* **87**, 1226.
 (240) 1940. Zur Erinnerung an Robert Emden. *Naturf. Ges. Zürich*, **85**, 345.
 (241) 1941. Jonathan Zenneck z. 70. Geburtstage. *Hochfrequenztech. u. Electroakust.* **57**.
 (242) 1941. Schuppe, v. Hans, Physik der Leibestübungen. *Naturwissenschaften*, **29**, 320. (Review.)
 (243) 1941. Zur Feinstruktur der Wasserstofflinien. *Naturwissenschaften*, **29**, 286.
 (244) 1941. Heinrich Kayser, geb. 16 März 1853 zu Bingen, gest. 14 Oktober 1940 zu Bonn. *Z. Astrophys.* **20**, 308.
 (245) 1941. Zur Theorie der Feinstruktur. *Z. Phys.* **118**, 295.
 (246) 1941. Bemerkungen zur Theorie der Supraleitung. *Z. Phys.* **118**, 467.
 (247) 1942. Elektromagn. Grössen und Einheiten. *Phys. Z.* **26**, 23.
 (248) 1942. (With F. RENNER.) Strahlungsenergie u. Erdabsorption bei Dipolantennen. *Ann. Phys. Lpz.* **41**, 1.
 (249) 1942. Zwanzig Jahre spektroskopischer Theorie in München. *Scientia*, p. 123.
 (250) 1942. Die Quantenstatistik u. d. Problem d. He. II. *Chem. Ber.* **75**, 1988.
 (251) 1943. Die frei schwing. Kolbenmembran. *Ann. Phys. Lpz.* **42**, 389.
 (252) 1943. Zum Andenken an David Hilbert. *Naturwissenschaften*, **31**, 213.
 (253) 1943. Zu Plancks 85. Geburtstag. *Fränk. Kurier*.
 (254) 1943. Die ebene und sphärische Welle im polydimensionalen Raum. *Math. Ann.* **119**, 1.
 (255) 1943. Zum Gedächtnis an Giov. Gentile jun. *Nuovo Cimento*, Ser. 9, **1**, 151.
 (256) 1943. v. Weizsäcker, C. F., Zum Weltbild der Physik. *Phys. Z. p.* 488. (Review.)
 (257) 1943-1944. David Hilbert. *Gött. Nachr. Jahrbuch*, p. 87.
 (258) 1944. Das Werk Boltzmanns. *Wien ChemZig*.
 (259) 1945. Spezielle Lösungen d. Problems der elast. Eigenschwingung beim Quader und Würfel. *S. B. Bayer. Akad. Wiss.* p. 87.
 (260) 1946-1947. Heinrich Freiherr Rausch v. Traubenberg. *Z. Naturf.* **1**, 420; Wolfgang Gaede. *Z. Naturf.* **2a**, 240.
 (261) 1947. Richard Willstätter zum Gedächtnis. *Dtsch. Beiträge*, Jahrg. I, Heft 4, p. 2.
 (262) 1947. Max Planck zum Gedächtnis. *Neue Zeitung*, 6. October.
 (263) 1948. Zum 60. Geburtstag von W. Kossel am 4 Jan. *Z. Naturf.* p. 595.
 (264) 1948. Berichtungen und Ergänzungen zu der Arbeit: Die frei schwingende Kolbenmembran. *Ann. Phys. Lpz.* **2**, 85.
 (265) 1948. Zum 60. Geburtstag von W. Lenz am 8 June. *Z. Naturf.* **3a**, 186.
 (266) 1948. Philosophie und Physik. seit 1900. Ferienkurs am 30 July. *Naturw. Rdsch.* p. 97.
 (267) 1948. Gedächtnisfeier der Phys. Ges. in Württemberg-Baden zu Heidenheim 15 Nov. 1947. (In honour of Max Planck.) *Ann. Phys. Lpz.* **3**, 3.

- (268) 1944-1948. Obituaries of: Emden, p. 229; Eddington, p. 254; Zeeman, p. 251; J. J. Thomson, p. 228. *Jb. Bayer. Akad. Wiss.*
- (269) 1949. Zum 100. Geburtstag von F. Klein. *Naturwissenschaften*, **36**, 289.
- (270) 1949. Albert Einstein zum 70. Geburtstag. *Dtsch. Beiträge* Jahrg, **3**, 3 (and English translation).
- (271) 1949. Some reminiscences of my teaching career. *J. Phys.* **12**, 315.
- (272) 1950. Das unendlich Kleine und das unendlich Grosse in der Physik. *Dtsch. Beiträge* Jahrg. **4**, 3.
- (273) 1950. Ansprache anlässlich der Verleihung der Planck Medaille an Peter Debye. *Med. Phys. Bl.* **6**, 509.
- (274) 1950. Aus den Lehrjahren von W. Rogowski. *Arch. Elektrotech.* **40**, 3.
- (275) 1950. (With F. BOPP.) Zum Problem d. Maxwell-Spannungen. *Ann. Phys. Lpz.* **8**, 41. (With G. RAMBERG.) Drehmoment eines permanenten Magneten im Felde eines permeablen Mediums. *Ann. Phys. Lpz.* **8**, 46.
- (276) 1950. (With E. RÜCHARDT & W. ROLLWAGEN.) Die Physik der Gegenwart und die moderne Medizin. *München Med. Wschr.* **92**, 1237.

LIST OF BOOKS

1909. (With F. KLEIN.) *Theorie des Kreisels*. Leipzig: Teubner.
- 1903-1929. Editor of *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. V. Physik*. Leipzig: Teubner.
1926. *Three lectures on atomic physics*. London: Methuen.
1928. *Probleme der Modernen Physik, Festschrift zum 60. Geburtstage*. Leipzig: Hirzel.
1929. *Lectures on wave mechanics*. Calcutta.
1949. *Vorlesungen über Theoretische Physik, Vol. I. Mechanik*, 4 ed. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchh.
1949. *Vorlesungen über Theoretische Physik, Vol. II. Mechanik der Deformierbaren Medien*, 2 ed. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchh.
1949. *Vorlesungen über Theoretische Physik, Vol. III. Elektrodynamik*. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchh.
1950. *Vorlesungen über Theoretische Physik, Vol. IV. Optik*. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchh.
1950. *Vorlesungen über Theoretische Physik, Vol. V. Thermodynamik*. (In preparation by F. Bopp and I. Meixner.)
1947. *Vorlesungen über Theoretische Physik, Vol. VI. Differentialgleichungen der Physik*. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchh.
1950. *Atombau und Spektrallinien, Vol. I*. 7 ed. Braunschweig: Friedr. Vieweg.
1951. *Atombau und Spektrallinien, Vol. II*. 2 ed. Braunschweig: Friedr. Vieweg.

Materiewellen*).

Von M. v. LAUE, Göttingen.

Wohl alle von Ihnen haben mit dem Mikroskop mehr oder weniger oft zu tun; für manche mag es die tägliche Beschäftigung abgeben. So darf ich, um an etwas Ihnen Bekanntes anzuknüpfen, zuerst einige mikroskopische Aufnahmen zeigen.

Die erste (Fig. 1) zeigt den allbekannten Unterschied zwischen Hellfeld- und Dunkelfeldbeleuchtung

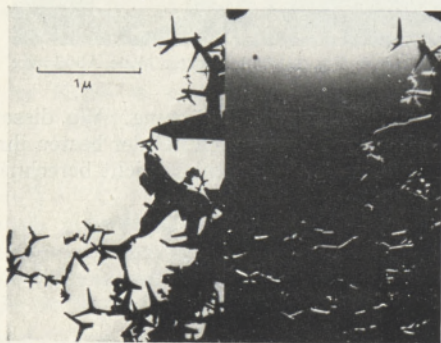


Fig. 1. Abbildung von Zinkoxydkristallen durch Elektronenstrahlen (nach BOERSCH 1943).

bei scharfer Einstellung auf ein und dasselbe undurchsichtige, flache Objekt. In der Figur sehen Sie links ein solches Objekt, auf dessen Natur es sonst nicht

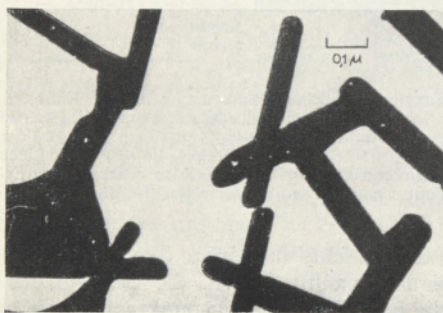


Fig. 2. Abbildung von Zinkoxyd durch Elektronenstrahlen. Energie $U = 38 \text{ ekV}$ (nach BOERSCH 1943).

ankommt, als schwarzen Schatten auf hellem Grunde; rechts, bei Dunkelfeldbeleuchtung, sehen Sie nur seine Ränder, und zwar als helle Linien, weil von ihnen Randwellen in den Schattenraum hinein gehen. Die Fig. 2 zeigt einige andere derartige Gegenstände bei scharfer Einstellung, die fünf folgenden Figuren (Fig. 3-7) lehren, was bei unscharfer Einstellung aus diesem Bilde wird. Dabei ist die Einstellung des Mikroskops bald nach der einen, bald nach der anderen Seite verändert; auch unterscheiden sich die Auf-

* Vortrag, gehalten am 23. Oktober 1950 auf der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in München.

nahmen im Maße der Fehleinstellung. Es kommt uns auf die Einzelheiten nicht an; wichtig ist nur, daß in jedem Falle die Ihnen wohlbekanntes FRESNELSchen Beugungserscheinungen auftreten. Vielleicht haben Sie sie selten so ausgeprägt, mit so vielen Maxima und Minima der Helligkeit gesehen. Das erklärt sich leicht; im Gegensatz zu der üblichen Beobachtung mit weißer Strahlung sind diese mit einfarbiger Strahlung

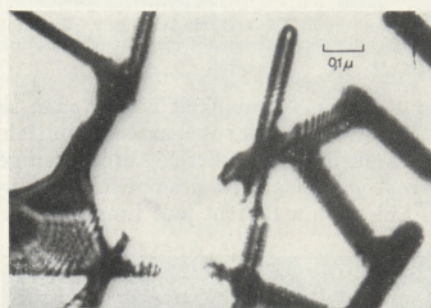


Fig. 3. Abbildung von Zinkoxyd wie bei Fig. 2, jedoch extrafokale Abbildung.

gemacht. Besonders einfach ist der in Fig. 8 dargestellte Versuch, der uralte FRESNELSche Versuch über die Beugung an einer geraden Kante. Sie sehen rechts

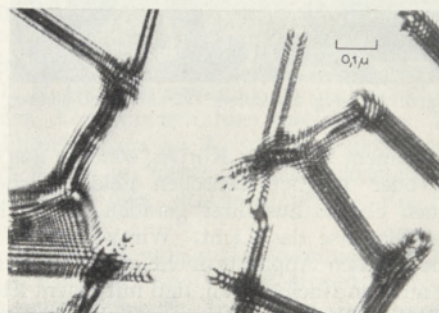


Fig. 4. Abbildung von Zinkoxyd wie bei Fig. 2. Extrafokale Abbildung mit FRESNELSchen Beugungserscheinungen (nach BOERSCH 1943).

die Skizze der Versuchsanordnung, links die Aufnahme, darunter die nach der Wellenoptik zu erwartende, schon von FRESNEL angegebene Intensitätskurve. Schon da, wo man nach der geometrischen Optik Schatten erwarten müßte, findet sich eine gewisse geringe Intensität; sie steigt allmählich an, wenn wir uns der geometrischen Schattengrenze nähern, und geht danach langsam, aber mit vielen Schwankungen in die Intensität über, wie sie der vollen, unabgeschatteten Beleuchtung entspricht. Im vorliegenden Bilde lassen sich bei genauer Betrachtung bis zu 12 Intensitätsmaxima feststellen.

Nun werden Sie fragen: „Was hat das mit dem Thema ‚Materiewellen‘ zu tun?“ Nun, die Antwort lautet: Diese Aufnahmen sind nicht mit sichtbarem Licht gemacht, auch nicht mit Lichtarten aus den dem Auge unsichtbaren Spektralbereichen, sondern mit Elektronenstrahlen. Bei der Fig. 8 finden Sie Angaben über die Energie dieser Elektronen, berechnet aus der durchlaufenen Beschleunigungsspannung, und die Wellenlänge, die man aus der Theorie, wie wir so gleich besprechen werden, daraus entnehmen kann.

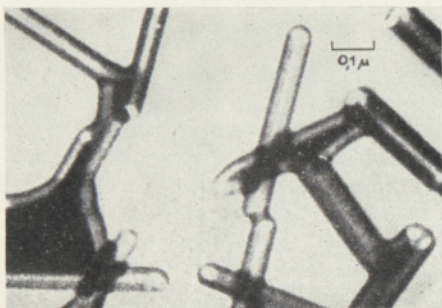


Fig. 5. Abbildung von Zinkoxyd wie bei Fig. 2. Extrafokale Abbildung mit FRESNELSchen Beugungserscheinungen (nach BOERSCH 1943).

Mit einer gewissen Genauigkeit könnte man sie auch aus den Abmessungen der Apparatur ermitteln. Das Mikroskop, mit dem die anderen Aufnahmen gemacht sind, besteht ganz nach Art des optischen Mikroskops aus zwei Linsen; nur besteht jede Linse hier nicht aus

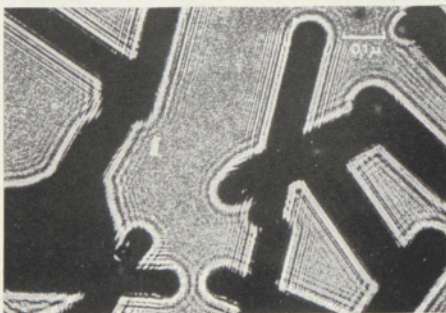


Fig. 6. Wie Fig. 2. Andere extrafokale Abbildung.

Glas oder einem sonstigen Körper, sondern aus einem elektro- oder magnetostatischen Feld, welches die Elektronen ebenso aus ihrer geraden Bahn ablenkt wie eine Glaslinse das Licht. Wir wollen auf diese höchst ingenieuren Apparate nicht eingehen. Es kam mir nur auf den Nachweis an, daß mit einem Elektronenstrahl eine Wellenerscheinung verknüpft ist, und diesen Nachweis haben, denke ich, diese Aufnahmen, die wir Prof. BOERSCH [1], jetzt an der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt Braunschweig, verdanken, überzeugend erbracht. Ihre Überzeugungskraft ist deshalb so besonders groß, weil für die beugenden Objekte hier nur eine Eigenschaft wichtig ist, ihre Undurchsichtigkeit. In den anderen Fällen von Elektronenbeugung und Elektroneninterferenzen kommt es auf den atomaren Aufbau der benutzten beugenden Körper an; ein Skeptiker könnte am Ende die beobachtenden Effekte auf vielleicht noch unbekannte Eigenschaften der Atome schieben. Das ist bei den Fig. 1–8 ausgeschlossen. Auch geht, wie erwähnt, eine Berechnung der Wellenlänge aus diesen Figuren auf

die Bestimmung von Strecken zurück, die mit Atomdimensionen nichts zu tun haben. Wir sind dabei also gegen alle etwaigen Unvollkommenheiten einer atomaren Theorie gesichert. Ich glaube, Sie am Beispiel der Elektronenbeugung von der Existenz der Materiewellen überzeugt zu haben.

Aber wir müssen diese Aufnahmen noch etwas genauer diskutieren. Mit einem einzelnen Elektron lassen sie sich nicht erzielen; das hinterläßt auf der photographischen Platte in jedem Falle nur eine so



Fig. 7. Wie Fig. 2. Andere extrafokale Abbildung.

gut wie punktförmige Schwärzung. Wo diese liegt, kann die heutige Physik auch bei der besten ihr möglichen Kenntnis der Verhältnisse nicht berechnen. Es

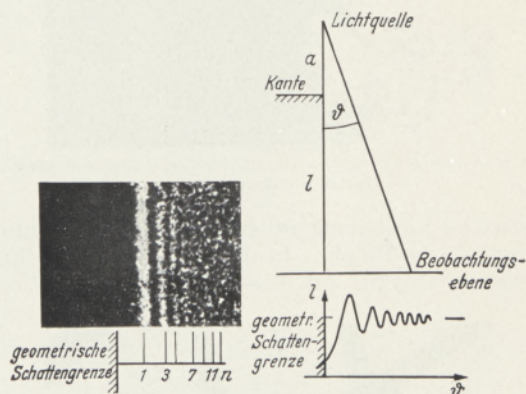


Fig. 8. FRESNELSche Elektronenbeugung an der Kante, darunter Lage der Schattengrenze und der Maxima nach Gl. (3.28). Kante: Amorphes Aluminiumoxyd. $a = 3,5 \cdot 10^{-2}$ cm. $l = 31,3$ cm. Wellenlänge $6,6 \cdot 10^{-10}$ cm, d.h. Energie $3,4 \cdot 10^4$ eV. Lichtoptisch 112fach nachvergrößert, so daß die Körner der photographischen Schicht schon störend hervortreten (H. BOERSCH 1940).

genügt dazu nicht, daß man die durchlaufene Beschleunigungsspannung, d.h. die Energie des Elektrons, die Lage des Ausgangspunktes und die anfängliche Strahlrichtung angibt. Nur eine Wahrscheinlichkeit, die Spur des Elektrons zu finden, kann die heutige Theorie für jeden Punkt der Platte geben. Erst wenn man den Versuch mit außerordentlich vielen, in ihrer Bewegung von einander unabhängigen Elektronen vornimmt, erhalten wir Aufnahmen von der Art der Fig. 1–8; an jedem Orte entspricht die Schwärzung der Zahl der dort eingetroffenen Elektronen, d.h. der Wahrscheinlichkeit, ein bestimmtes einzelnes dort zu finden. Dies gilt für alle solche Aufnahmen.

Die Aufnahmen von Prof. BOERSCH stammen aus den Jahren 1940 und 1943; sie sind Spätlinge in der Entwicklung der Lehre von den Materiewellen. Diese

begann erheblich früher, nämlich 1925, als Prince LOUIS DE BROGLIE [2] eine kühne theoretische Überlegung veröffentlichte. Er knüpfte an den Begriff des Strahlungsquants an, den 1905 EINSTEIN in Anlehnung an PLANCK in die Theorie des Lichts eingeführt hatte. Dieses Quant repräsentiert eine zur Schwingungszahl ν des Lichts proportionale Energie; die Proportionalitätskonstante ist PLANCKs elementares Wirkungsquantum, also eine universelle Naturkonstante. Das Strahlungsquant hat aber auch, gleich einem bewegten Körper, eine Bewegungsgröße, einen Impuls; er äußert sich in dem experimentell gemessenen Druck der Strahlung gegen jeden beleuchteten Körper. Und dieser Impuls ist durch dieselbe Naturkonstante mit der Wellenlänge des Lichts verbunden, er ist zu ihr umgekehrt proportional. Beide Beziehungen übertrug DE BROGLIE auf die Welle, die nach seiner Hypothese die Bewegung jedes Teilchens begleitet. Wir haben heute nur mit der zweiten zu tun, die wir $G = h/\lambda$ schreiben, indem G den Impuls des Teilchens, λ die genannte Wellenlänge bedeutet. Diese berühmte DE BROGLIE-Formel ist es, was durch alle Beugungs- und Interferenzversuche mit Materiewellen geprüft wird. Dabei wird der Impuls G einer Korpuskel von der Masse m entweder durch Messung seiner Geschwindigkeit v gemäß der Relativitätstheorie bestimmt; dann muß die Wellenlänge der Beziehung

$$\lambda = \frac{h}{m v} \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$$

gehören; oder man bestimmt bei elektrisch geladenen Teilchen die durchlaufene Beschleunigungsspannung, d.h. ihre Energie E , und schließt daraus auf den Impuls. Dann verwandelt sich die DE BROGLIE-Formel in eine Gleichung, die in der einfachsten, unrelativistischen Form $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 m E}}$

lautet. Fig. 9 zeigt Ihnen den Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Energie in zwei Kurven; die obere gilt für Elektronen, die untere für die 1850mal schwereren Protonen. Abszisse und Ordinate sind in logarithmischem Maßstabe aufgetragen, um einen hinreichend großen Bereich für Wellenlängen und Energien zu umfassen; dieser geht für die Wellenlängen von 10^{-14} bis zu 10^{-5} cm, für die Energien von 10^{-3} bis 10^9 V durchlaufener Beschleunigungsspannung. Beide Kurven sind für geringere Energien gerade, wie es der angeführten, unrelativistischen Formel entspricht. Aber diese wird für höhere Energien ungenau, deshalb krümmen sich beide Kurven nach unten und nähern sich einander mehr und mehr: sie würden zu einer Kurve verschmelzen, setzten wir die Zeichnung zu noch höheren Energien fort. Geprüft hat man die Formel an Elektronen bis etwa 500000 V und sie stets in vorzüglicher Übereinstimmung mit dem Versuch gefunden.

Aber an solche Versuche dachte DE BROGLIE anfangs noch nicht. Dies tat zuerst der damals in Göttingen, im Institut von JAMES FRANCK arbeitende Physiker WALTER ELSASSER, der jetzt in Salt Lake City (in USA., Utah) wirkt. In einer „Kurzen Originalmitteilung“ in den „Naturwissenschaften“ [3], sagte er mit bewundernswerter Klarheit die Beugung der DE BROGLIESchen Materiewellen voraus, sowohl die Beugung an einzelnen Atomen als auch die an den Raumgittern von Kristallen. Er brachte sie sogar in Beziehung zu damals schon vorliegenden, aber noch rätselhaften Beobachtungen wie den Beobachtungen

RAMSAUERS über die Streuung der Elektronen an den einzelnen Atomen eines Gases [4] und den Versuchen von C. J. DAVISSON und C. H. KUNZMAN über die „Reflexion“ von Elektronenstrahlen an einer Platinplatte [5]. ELSASSERS Voraussagen haben sich später vollauf bewährt.

So sehr es uns heute wundern mag, diese Veröffentlichung blieb zunächst ziemlich unbeachtet. Daß DE BROGLIES Theorie nur für den leeren Raum gedacht war und keinen Anhalt zu einer quantitativen Berechnung der Einwirkung eines Atoms bot, hat sicher dazu beigetragen. Immerhin setzten DAVISSON und seine Mitarbeiter ihre Untersuchungen über die von Metallkristallen zurückgeworfenen Elektronen und ihre Richtungsverteilung fort, bemerkten z.B., daß

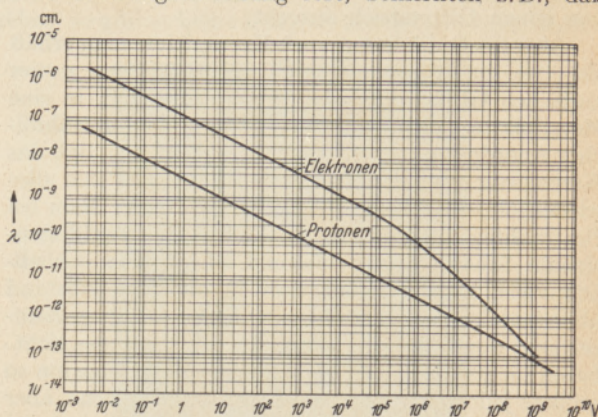


Fig. 9. DE-BROGLIE-Wellenlängen λ für Elektron und Proton als Funktionen der Energie in eV. Auf Abszissen- und Ordinatenachse logarithmischer Maßstab.

diese von der Orientierung des Kristalls gegen den Elektronenstrahl abhängt. Den entscheidenden Fortschritt brachte dann am 13. März 1926 ERWIN SCHRÖDINGERS [6] erste Mitteilung „Quantisierung als Eigenwertproblem“. Sie enthielt diejenige Ergänzung der DE BROGLIE-Theorie, auf Grund deren man die Einwirkung von einzelnen Atomen und Atomhaufen auf die Elektronenstrahlen mathematisch berechnen konnte. Unter ihrem Eindruck suchten nun C. J. DAVISSON und L. H. GERMER systematisch nach Erscheinungen bei den Elektronenstrahlen, welche den Röntgenstrahlinterferenzen an Kristallen analog waren. Sie fanden solche an einem Nickel-Einkristall und veröffentlichten dies epochemachende Ergebnis im März 1927 [7].

Kaum drei Monate später konnten G. P. THOMSON und A. REID [8] ähnliche Beobachtungen bekannt geben, und seitdem hat sich eine riesige Literatur über Elektroneninterferenzen entwickelt. Die Überzeugung von der Existenz der Materiewellen hat sich seit 1930 allgemein durchgesetzt. Um aber die Versuche von DAVISSON einerseits, G. P. THOMSON andererseits zu verstehen, müssen wir auf die schon früher, nämlich 1912, entdeckten Röntgenstrahlinterferenzen kurz eingehen.

Wir müssen sogar noch etwas weiter ausgreifen. Das klassische Instrument der optischen Spektroskopie ist das Gitter. Es besteht in der einfachsten Ausführung in einer großen, sehr großen, Zahl paralleler Striche, die in gleichem Abstände auf einer Glasplatte eingeritzt sind. Doch gibt es viele Modifikationen; wesentlich ist nur, daß die Striche alle den gleichen

Abstand haben, daß mithin das Gitter eine zu den Strichen senkrechte Periode besitzt. Denn dieser Periode paßt sich die Periodizität einer auffallenden einfarbigen Lichtwelle leicht an, und so entsteht jene besonders einfache Interferenzerscheinung, die für das Gitter kennzeichnend ist: Eine Reihe von scharfen, ziemlich äquidistanten Helligkeitsmaxima, die im allgemeinen von der Mitte nach beiden Seiten allmählich schwächer werden. Ihr gegenseitiger Abstand wächst mit der Wellenlänge. Darum trennt das Gitter bei einer mehrfarbigen Lichteinstrahlung die verschiedenen Bestandteile; darauf beruht seine Brauchbarkeit für die Spektroskopie. Mathematisch läßt sich diese Interferenzerscheinung verstehen als das Ergebnis der Überlagerung der vielen gestreuten Wellen, deren jede von einem Gitterstrich ausgeht.

Aber die Optik kennt auch Kreuzgitter; man erhält sie etwa durch gekreuztes Übereinanderlegen zweier einfachen Gitter, oder aber, indem man z. B. in eine Metallplatte gleich große Löcher in schachbrettähnlicher Anordnung stanzt. Wichtig ist lediglich, daß das Kreuzgitter zwei Perioden enthält, in denen sich alles wiederholt. Den beiden Perioden entspricht dann bei Bestrahlung mit einfarbigem Lichte eine zweidimensionale Schar scharfer Maxima. Legt man schließlich viele, gleiche Kreuzgitter in gleichem Abstand übereinander, so entsteht ein Raumgitter, gekennzeichnet durch drei Perioden. In der Optik des sichtbaren Lichts spielt dies freilich keine Rolle, eine um so größere jedoch für jene dem Licht wesensgleiche, aber viel kurzwelligere Strahlung, die RÖNTGEN entdeckt hat. Denn die Natur liefert uns aus Atomen bestehende Raumgitter in den Kristallen. Auch ein solches Raumgitter gibt, wenn wir geeignete Strahlung auffallen lassen, Anlaß zu Gitterspektren, wengleich dabei gewisse Bedingungen maßgebend sind.

Die Idee der raumgittermäßigen Anordnung der Atome in den Kristallen stammt aus einer Publikation des Freiburger Physikers L. A. SEEBER von dem Jahre 1824 [9]. Das war eine Tat! Niemand hatte zuvor daran gedacht, den von der Chemie entwickelten Atom-begriff auf die Physik zu übertragen. Ein damals ungewöhnlicher Glaube an die Realität der Atome war dazu notwendig; SEEBER war seinen Zeitgenossen weit voraus. Aber, wie es in solchen Fällen oft geschieht, sein Gedanke blieb fast unbeachtet. Nur eine Reihe großer Mathematiker sah darin das reizvolle Problem, eine Systematik aller geometrisch möglichen Raumgitter aufzustellen, was im Jahre 1890 dann FEDOROW [10] sowie SCHOENFLIES [11] auch vollständig gelang. In der Physik jedoch geriet die Idee in Vergessenheit; es gab eben keine Beobachtung, welche die Existenz solcher Raumgitter auch nur wahrscheinlich machte.

Das änderte sich mit einem Schlage, als 1912 im Institut für theoretische Physik der Universität München Versuche über den Durchgang von Röntgenstrahlen durch Kristalle angestellt wurden [12], mit denen man Interferenzerscheinungen erzielte, wie sie sich nur aus einer Raumgitterstruktur erklären ließen. Die wohlbekanntesten ersten Aufnahmen dieser Art wurden mit „weißem“ Röntgenlicht gemacht, wenn ich diesen Ausdruck einmal vom sichtbaren Licht her übernehmen darf; er meint in beiden Fällen das gleichzeitige Auftreten vieler verschiedener Wellenlängen. Einfarbige Röntgenstrahlung ergibt nur unter einer be-

sonderen Bedingung diese Erscheinung; die Vielheit der Wellenlängen ermöglicht jedoch, daß einige davon bei solchen Aufnahmen diese Bedingung erfüllen.

Diese älteste Methode der Röntgenstrahinterferenzen braucht größere, gut ausgebildete Kristalle. Nicht von jeder kristallinen Substanz sind solche erhältlich. Da war es denn ein bedeutsamer Fortschritt, als 1916 DEBYE und SCHERRER in Göttingen Kristallpulver der Röntgenstrahlung aussetzten, die in der Regel leichter zu bekommen sind. Ein DEBYE-SCHERRER-Diagramm wird mit einfarbiger Röntgenstrahlung aufgenommen; einige der vielen regellos durcheinander gewürfelten Pulverkörner liegen nämlich stets so, daß die angedeutete Interferenzbedingung erfüllt ist. Es besteht aus einer Reihe scharfer, konzentrischer Ringe.

Auch bei Elektronenstrahlen kennt man Interferenzen, sowohl solche an einzelnen Kristallen als an Kristallpulvern. Das war die große, für die Lehre von den Materiewellen entscheidende Entdeckung des Jahres 1927. Benutzt man mit THOMSON und REID Kristallpulver oder einen aus vielen kleinen Kristallkörnern zusammengesetzten, „polykristallinen“ Körper, so erhält man mit Elektronenstrahlen einer bestimmten Energie, also einheitlicher Wellenlänge, als Interferenzfigur scharfe konzentrische Kreise, ganz wie beim DEBYE-SCHERRER-Diagramm mit Röntgenstrahlen. Bei der Benutzung einheitlicher Kristalle tritt ein leichter Unterschied gegen die Röntgenstrahlversuche auf. Man arbeitet nämlich auch dann mit Elektronen einer und derselben Energie und Wellenlänge; daß trotz der erwähnten Interferenzbedingung für Raumgitter Interferenzpunkte zustandekommen, liegt vielfach an der geringen Dicke der benutzten Einkristallschichten; diese mildert nämlich jene Bedingung. Bei Energien von wenigen 100 eV, wie sie DAVISSON und GERMER bei ihren ersten Untersuchungen benutzten, liegen die Verhältnisse übrigens etwas anders als bei Röntgenstrahlen, weil hier die Einwirkung des einzelnen Atoms auf die Welle ungleich mehr ausmacht. Aber bei Energien von 10000 oder mehr Volt kann man an solchen Aufnahmen die DE BROGLIE-Beziehung zwischen Energie und Wellenlänge nach demselben Schema prüfen, das bei den Röntgenstrahlen zur Wellenlängenmessung dient, und hat noch stets vortreffliche Bestätigungen der Theorie gefunden.

Die Elektronen sind aber nicht die einzigen Korpuskeln, an denen man die Materiewellen nachgewiesen hat. Seit der CHADWICKSchen Entdeckung von 1932 [13] kennt man ungeladene Elementarteilchen von Protonenmasse, die Neutronen. Sie haben nur schwache Wechselwirkung mit den Atomen, durchdringen daher alle Materie ziemlich leicht, auch die Kristalle. Immerhin reicht diese Wechselwirkung aus, daß Raumgitterinterferenzen dabei zustande kommen (Fig. 10 und 11)¹⁾. Diese sind denen für Röntgenstrahlen entsprechender Wellenlänge sehr ähnlich; in der Lage der Helligkeitsmaxima besteht überhaupt kein Unterschied. Neutroneninterferenzen lassen sich freilich nur dort untersuchen, wo so mächtige Neutronenquellen verfügbar sind wie in USA. Aber dort

¹⁾ Diese im Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge (Tennessee) erzielten Aufnahmen stellte C. G. SHULL freundlichst für diesen Vortrag zur Verfügung. Ich möchte ihm auch hier meinen besten Dank aussprechen. Veröffentlichungen z. B.: W. A. STRAUSSER, C. G. SHULL u. E. O. WOLLAN, *Physic. Rev.* 76, 195 (1949); E. O. WOLLAN, C. G. SHULL u. M. C. MARNEY, *Physic. Rev.* 73, 527 (1948).

ließen die Versuche sich in den letzten Jahren ohne grundsätzliche Schwierigkeiten durchführen.

Viel früher, nämlich seit 1929, haben OTTO STERN und seine Mitarbeiter in Hamburg [14] und TH. H. JOHNSON in Swarthmore [15] Beugungsversuche mit Atomstrahlen von Helium oder Protonen veröffentlicht. Auch sie verwenden dazu Kristalle, aber nicht deren Raumgitter; denn diese Strahlen können nicht in die Kristalle eindringen. Nun aber trägt ein Kristall auf jeder seiner Flächen ein Kreuzgitter, gebildet von der obersten Schicht von Atomen. An diesen lassen sich die genannten Strahlen beugen. Auch diese schwierigen, aber mit vollendeter Meisterschaft durchgeführten Versuche ermöglichen eine Prüfung der DE BROGLIE-Beziehung zwischen Impuls und Wellenlänge; sie haben diese vollauf bestätigt.

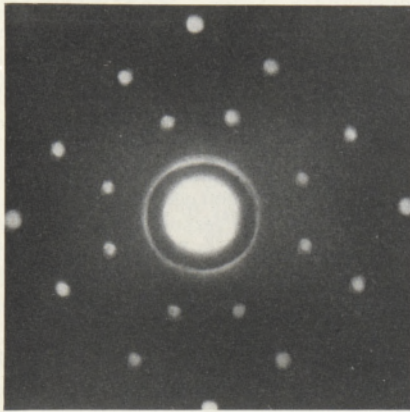


Fig. 10. Interferenzerscheinungen bei Neutronenstrahlen. NaCl, durchstrahlt längs 100 (WOLLAN, SHULL u. MARNEY 1948).

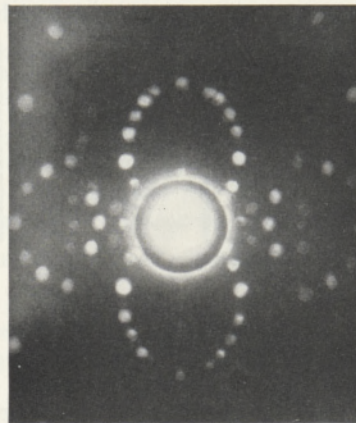


Fig. 11. Interferenzerscheinungen bei Neutronenstrahlen an Quarz.

Aber ich will diese Aufzählung nicht verlängern, wohl aber hervorheben, daß die Gleichartigkeit zwischen den Raumgitterversuchen mit Röntgenstrahlen, Neutronen- und Elektronenstrahlen sich nur auf die Lage der Intensitätsmaxima bezieht, nicht auf die Helligkeitsverteilung zwischen diesen. Die Röntgenstrahlen reagieren nämlich nur auf die Elektronenhüllen der Atome, die Neutronen nur auf die Atomkerne, die Elektronen aber auf beides. Es ist ein interessantes Studium, diese Unterschiede aus den Helligkeitsverteilungen zwischen den Maxima heraus zu lesen. Jedoch für den Nachweis der Realität der Materiewellen ist es von geringerer Bedeutung.

Nun könnte der Hörer vielleicht versucht sein, aus allen diesen Versuchen auf eine gewisse Analogie zwischen elektromagnetischen Wellen und diesen neuen Materiewellen zu schließen. Leider liegen die Dinge nicht so einfach.

Eine elektromagnetische Welle, etwa eine Lichtwelle, bildet ein elektromagnetisches Feld; d.h.: In jedem von ihr berührten Punkte im Raum gibt es ein wirkliches, physikalisches Etwas, über dessen Einordnung in das Begriffssystem der Physik vielleicht noch zu diskutieren wäre. Jedenfalls, es ist etwas da. Dieser für den Elektromagnetismus wesentliche Zug läßt sich nun nach meiner, vielleicht nicht von allen Physikern geteilten Auffassung nicht auf die Materiewellen übertragen.

Um diesen fundamentalen Unterschied klar zu machen, denken wir einmal an die Technik der HERTZ-

schen Wellen, die so oft mehr oder minder weit getrennte, aber gekoppelte Sender benutzt. Jeder Sender schickt eine Welle in den Raum hinaus. Aber so groß ihre Zahl auch sein mag, sie ergeben bei ihrem Zusammentreffen ein einziges elektromagnetisches Feld, in welchem dann die Interferenzen zwischen diesen Einzelwellen zu bemerken sind. Wirken verschiedene, gleiche Lichtquellen zusammen, so ergeben sie ebenfalls nur ein einziges Feld; daß man in ihm keine Interferenzerscheinungen bemerkt, hat nur einen sekundären, nämlich statistischen Grund: Wir können Lichtquellen nicht der Schwingungsphase nach koppeln wie HERTZsche Sender. Überlagern wir aber die Materiewellen, die etwa von zwei verschiedenen Elektronenquellen, also z.B. von zwei Glühfäden ausgehen, so gibt es keine Interferenzerscheinungen, nicht

aus einem statistischen, sondern einem viel fundamentaleren Grunde: Die Wellen zweier unabhängigen Elektronen liegen sozusagen in zwei verschiedenen dreidimensionalen Räumen, sind also etwas ganz anderes als eine einzelne Materiewelle.

Dies muß ich Ihnen an der SCHRÖDINGER-Theorie erläutern. Ihre Grundgleichung ergibt beim einzelnen, unbeeinflussten materiellen Teilchen, wie ich schon erwähnte, für jeden Punkt eine Wahrscheinlichkeit, es dort zu finden. Diese Wahrscheinlichkeit hängt von den drei Koordinaten dieses Teilchens ab. Aber für zwei gleiche oder verschiedene Teilchen gibt diese Theorie Wahrscheinlichkeiten, die von den sechs Koordinaten der beiden Teilchen, bei drei Teilchen von deren neun Koordinaten abhängen usw. Die so dargestellten „Wellen“ lassen sich in unserem dreidimensionalen Raum überhaupt nicht unterbringen. Gewiß, bewegen sich die Teilchen alle unabhängig voneinander, so läßt sich ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion in Faktoren spalten, von denen jeder nur die drei Koordinaten eines Teilchens enthält. Darauf beruht die Berechtigung, bei den oben besprochenen Beugungsversuchen und ihrer Deutung davon abzusehen, daß sie mit sehr vielen Teilchen gemacht sind; denn zwischen den Partikeln eines Elektronen- oder Atomstrahls besteht in der Tat kaum noch Wechselwirkung. Aber besteht gar keine? Das wird niemand behaupten. Schlimmer ist, daß wir bei solchen Versuchen an Kristallen die Rückwirkung der einfallenden Partikeln auf die Atome des Raumgitters berücksichtigen müßten. Wir sind eigentlich inkonsequent, wenn wir nicht

eine gemeinsame SCHRÖDINGER-Gleichung für das einfallende Teilchen und alle diese Atome aufstellen, sondern den Atomen eine Stellung außerhalb aller Wellenmechanik geben. Die Not der ungeheuren mathematischen Schwierigkeiten, auf die ein konsequenteres Verfahren führte, gebietet uns dies, und es findet eine gewisse Rechtfertigung in der wohlbegründeten Überzeugung, daß die Gitteratome recht fest an ihren Gitterplätzen haften, so daß sich Wahrscheinlichkeitsaussagen darüber erübrigen. Auf jeden Fall aber ist es eine weitgehende Idealisierung, von der Welle des einzelnen Teilchens zu sprechen; genau genommen, gibt es kein von der Umwelt ganz unabhängiges Teilchen. Das Verfahren, das die Physik tatsächlich anwendet, bedeutet eine Näherungsmethode zur Lösung der SCHRÖDINGER-Gleichung und hat als solche seine Berechtigung; die Physik arbeitet ja überall ausschließlich mit Näherungen. Wenn es sich aber um

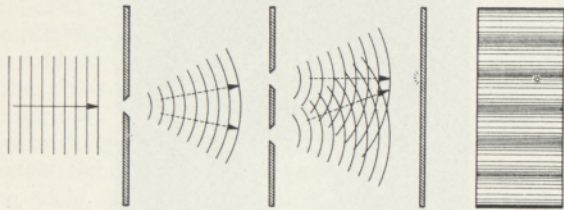


Fig. 12. Schema eines einfachen Beugungs- und Interferenzversuches.

weitgehende erkenntnistheoretische Schlüsse handelt, sollte man meines Erachtens recht vorsichtig erwägen, ob diese Näherung auch dafür ausreicht.

Über einen Punkt freilich schaffen diese Versuche völlige Klarheit: darüber, daß man mit den bisherigen Vorstellungen von der Materie nicht auskommt. *Es gibt kein Zurück zu ihnen.* Nicht nur, daß die NEWTONsche oder auch die relativistisch verbesserte Mechanik gegenüber solchen Beugungsversuchen versagt, selbst die gewohnte Idee eines bestimmten Orts des Teilchens, einer bestimmten Bahn desselben erweist sich als unzutreffend. Was ließe z. B. diese Vorstellung als Resultat eines der vielen Versuche mit Kristallen erwarten? Ich meine, sie müßte zu einem ähnlichen Ergebnis führen wie das bekannte Spiel mit der Kugel auf dem GALTONschen Brett, also zu der Erwartung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung, welche in der Fortsetzung des einfallenden Strahls ein Maximum hat und nach allen Seiten von dort langsam und stetig abnimmt. Das tatsächliche Versuchsergebnis sieht, wie wir gelernt haben, ganz anders aus. Wir können in die Theorie dieser Interferenzen nicht einmal eine Aussage einbauen, mit welchen Atomen des Kristalls die hindurchgehende Partikel in Wechselwirkung tritt; *alle* Atome sind an der Interferenzerscheinung beteiligt. Es ist unmöglich, eine Auswahl unter ihnen zu treffen.

An einem vereinfachten Modell hat NIELS BOHR diese Verhältnisse veranschaulicht. Denken wir uns in einem Schirm zwei verschließbare Öffnungen (Fig. 12)¹⁾ und lassen wir einen Atomstrahl senkrecht darauf fallen. Ist die eine Öffnung geschlossen, so finden wir auf einer Auffangplatte hinter dem Schirm ein durch Beugungseffekte verwaschenes Abbild der anderen. Vertauschen wir die Rollen beider Öffnungen,

so bekommen wir dasselbe Abbild, nur wegen der verschiedenen Lage der Öffnungen etwas verschoben. Öffnen wir aber beide, so ergibt sich auf der Auffangplatte keineswegs die Superposition dieser beiden Verteilungen, sondern eine Interferenzerscheinung mit Maxima und Minima, von denen zuvor nicht einmal eine Andeutung da war. Und fragen wir nun, durch welche Öffnung ein bestimmtes der ankommenden Teilchen hindurchgegangen ist, so kann das angesichts des Zusammenwirkens beider Öffnungen niemand beantworten. Hier liegt vielmehr ein Gedankenversuch vor, dem nur die Wellentheorie DE BROGLIES gerecht zu werden vermag. Die erwähnten Versuche mit Kristallen darf man als dessen Verwirklichung bezeichnen.

Es erhebt sich nun selbstverständlich die Frage, ob und wie Korpuskular- und Wellentheorie der Materie zueinander stehen. Weit verbreitet ist die Auffassung NIELS BOHRs von der Komplementarität beider Gedankenkreise. Entweder hat man den einen oder den anderen zu benutzen; die Art des Versuchs entscheidet, welchen. Es besteht kein Zweifel, daß die heutige Physik in der Tat so verfährt. Für den Durchgang des Elektrons durch den Kristall z. B. legt sie die Wellentheorie, für den Nachweis des Elektrons auf der in der gleichen Versuchsanordnung dahinter liegenden photographischen Platte dagegen die Korpuskulartheorie zugrunde. Diese Idee läßt sich durchaus konsequent durchführen und steht mit der Erfahrung in Einklang. In unserem Beispiel hat ja, wie wir anfangs ausführten, das Elektron auf der photographischen Platte, die es auffängt, einen ganz bestimmten, durch die Schwärzung nachweisbaren Ort. Aber befriedigt diese Komplementarität unser Erkenntnisbedürfnis? Ich glaube kaum! Und wenn somit der derzeitige Stand unserer Physik unbefriedigend ist, so bitte ich zum Schluß zwei Überlegungen dazu anstellen zu dürfen.

Erstens ist die für das einzelne Partikel ausgesprochene Wellentheorie, wie erwähnt, nur eine Näherung, die auf der niemals genau zutreffenden Annahme seiner Unabhängigkeit von der ganzen Umwelt beruht. Vielleicht reicht diese Näherung zur Diskussion so grundlegender Fragen, wie sie die Komplementaritätstheorie anschnidet, nicht aus. Zweitens aber ist unsere ganze Auffassung von der Materie einer fundamentalen Revision bedürftig. Das beweist die 1933 von BLACKETT und OCCHIALINI entdeckte Paarbildung [16].

Sie wissen, daß man neben dem negativ geladenen Elektron noch sein positives Gegenstück, das Positron, kennt, ein Teilchen derselben Masse und entgegengesetzt gleicher Ladung. Das Strahlungsquant hinreichend kurzwelliger Röntgenstrahlung kann sich an einem Atomkern, der aber dabei nur katalytisch wirkt, in ein Elektron und ein Positron verwandeln, also ein Paar von Elementarteilchen bilden. Das hat zuerst die WILSON-Kammer gezeigt. Bei Röntgenstrahlen von rund $\frac{1}{100000}$ Å Wellenlänge ist die Paarbildung so häufig, daß sie die fast einzige Ursache für die Absorption dieser Strahlung darstellt und daß man darauf die Intensitätsmessung der Strahlung basieren kann. Aber auch der umgekehrte Vorgang ist bekannt, die gegenseitige Vernichtung von Elektron und Positron unter Umwandlung in Röntgenstrahlung. Die Wellenlänge dieser „Vernichtungsstrahlung“ hat z. B. JESSE DU MOND in Pasadena 1949 mit einem Kristall-

¹⁾ Entnommen aus dem Beitrag von NIELS BOHR zu Band VII. Library of living philosophers (A. EINSTEIN), S. 216. Illinois: Evanston 1949.

spektrometer einwandfrei gemessen, übrigens in bester Übereinstimmung mit der theoretischen Voraussage. Nach unserer bisherigen Auffassung sollte jedes Elementarteilchen ein Individuum sein und als solches über alle Zeiten existieren. Die genannten, meines Erachtens tief erschütternden Erfahrungen zwingen zur Aufgabe dieser Auffassung. Elektron und Positron sind keine Individuen, sie können entstehen und vergehen. Es erhebt sich nun die Frage, ob dies nicht auch für die anderen Elementarteilchen gilt, etwa für das Proton. Bestimmtes wissen wir darüber noch nicht. Aber wenn wir auch nur in dem einen genannten Falle unsere Auffassung vom Elementarteilchen so fundamental umändern müssen, so sollten wir meines Erachtens mit allen Diskussionen über Wellen- und Korpuskulartheorie der Materie etwas zurückhalten. Die Entwicklung in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts hat uns in der Hauptsache gelehrt, wie wenig wir über die Materie wissen.

Eng verknüpft mit der Frage nach korpuskularer oder Wellennatur der Materie ist die, ob die Naturvorgänge vollständig determiniert oder nur Wahrscheinlichkeitsgesetzen unterworfen sind. Die Quantentheorie in der heutigen Fassung behauptet das letztere; wir erwähnten ja, daß sie für den Ort des

einzelnen Elektrons, das durch den Kristall gegangen ist, nur Wahrscheinlichkeitsaussagen ermöglicht. Die gesamte frühere Physik beruht auf dem Vertrauen auf Determiniertheit. Ich möchte meinen, daß man die Diskussion darüber ebenfalls aufschieben sollte, bis unser Wissen von der Materie die gegenwärtige Unsicherheit überwunden hat.

Literatur.

- [1] BOERSCH, H.: Naturwiss. 28, 711 (1940). — Physik. Z. 44, 32, 902 (1943). — [2] DE BROGLIE, L.: Thèses. Paris 1924. — [3] ELSASSER, WALTER: Naturwiss. 13, 711 (1925). — [4] RAMSAUER, C.: Ann. Physik 72, 345 (1922). — [5] DAVISSON, C. J., and C. H. KUNZMAN: Physic. Rev. 22, 242 (1923). — [6] SCHRÖDINGER, ERWIN: Ann. Physik 79, 361 (1926). — [7] DAVISSON, C. J., and L. H. GERMER: Nature (Lond.) 119, 558 (1927). — [8] THOMSON, G. P., and A. REID: Nature (Lond.) 119, 890 (1927). — [9] SEEBER, L. A.: Gilberts Ann. 46, 229, 349 (1824). — [10] FEDOROW, E. ST.: Verh. ksl. Min. Ges. Petersburg (2) 27, 448 (1891). — [11] SCHOENFLIES, A.: Kristallsysteme und Kristallstruktur. Berlin (1891). — [12] FRIEDRICH, W., P. KNIPPING u. M. LAUE: Sitzgsber. kgl. bayer. Akad. Wiss., Math.-physik. Kl. 1912, 303. — [13] CHADWICK, J.: Nature (Lond.) 129, 312 (1932). — [14] KNAUER, F., u. O. STERN: Z. Physik 53, 766 (1929). — [15] JOHNSON, TH. H.: Physic. Rev. 37, 847 (1931). — [16] BLACKETT, P. M. S., and G. P. S. OCCHIALINI: Proc. roy. Soc. Lond. 139, 699 (1933).

Max-Planck-Institut für Physik in Göttingen.

Eingegangen am 13. November 1950.

