40. Stunde

$$\frac{\mathfrak{L}}{c^2}\dot{\mathfrak{J}} + R\mathfrak{J} = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E} = a\sin(\nu t), \quad \nu \text{ in } 2\pi \text{ sec}$$

Inhomog. linear. Gleichg. allgem. Lösg. erhält wie zu einem partikulären Integral d. homog. addieren. Komplex bequem. Ist $\mathfrak{E}_1 = a_1\cos(\nu t)$ und $\mathfrak{E}_2 = a_2\sin(\nu t)$ und $\mathfrak{J}_1$ und $\mathfrak{J}_2$ die entsprechenden Lösg., so ist auch $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 + i\mathfrak{J}_2$ eine Lösg für $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + i\mathfrak{E}_2$.
Setzen $\mathfrak{E} = a e^{i\nu t}$, versuchen Lösg durch $\mathfrak{J} = b e^{i\nu t}$, $\dot{\mathfrak{J}} = i\nu\mathfrak{J}$. Einsetzen ergibt:

$$b\left(i\nu\frac{\mathfrak{L}}{c^2} + R\right) = a, \quad b = |\mathfrak{J}|e^{i\delta_{\mathfrak{J}}}, \quad a = |\mathfrak{E}|e^{i\delta_{\mathfrak{E}}}$$

$$\frac{a}{b} = R + i\nu\frac{\mathfrak{L}}{c^2} = \frac{|\mathfrak{E}|}{|\mathfrak{J}|}e^{i(\delta_{\mathfrak{E}} - \delta_{\mathfrak{J}})} = \frac{|\mathfrak{E}|}{|\mathfrak{J}|}e^{i\gamma}$$

$$R + i\nu\frac{\mathfrak{L}}{c^2} = x + iy = r e^{i\gamma} = r\cos\gamma + ir\sin\gamma$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{y}{x}$$

$$r = \frac{|\mathfrak{E}|}{|\mathfrak{J}|}, \quad x = R, \quad y = \nu\frac{\mathfrak{L}}{c^2}, \quad \frac{|\mathfrak{E}|}{|\mathfrak{J}|} = \sqrt{R^2 + \frac{\nu^2\mathfrak{L}^2}{c^4}}, \quad \gamma = \operatorname{arctg}\frac{\nu\mathfrak{L}}{c^2}$$

$$\mathfrak{E} = |a|\cos(\nu t + \delta_{\mathfrak{E}}), \quad \mathfrak{J} = |b|\cos(\nu t + \delta_{\mathfrak{J}}) \qquad b = |\mathfrak{J}|$$
$$= |a|e^{i(\nu t + \delta_{\mathfrak{E}})} \qquad = |b|e^{i(\nu t + \delta_{\mathfrak{J}})}$$

für $\mathfrak{E}$ durch Zeitnullpunktfestsetzg $\delta_{\mathfrak{E}} = 0$, $\delta_{\mathfrak{J}} = \delta_{\mathfrak{E}} - \gamma = -\gamma$

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\cos\nu t, \quad \mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{E}_0}{\sqrt{R^2 + \frac{\nu^2\mathfrak{L}^2}{c^4}}}\cos(\nu t - \gamma), \quad \gamma = \operatorname{arctg}\frac{\nu\mathfrak{L}}{c^2}$$

$R' = R\sqrt{1 + \frac{\nu^2\mathfrak{L}^2}{R^2c^4}}$ Impedanz bei L groß Drosselspule

Addition d. Lösg d. homog. Gleichg ergibt Eigenschwingg, die bald abklingt.

Kapazität im Stromkreis.

Elektrische Energie zu berücksichtigen

$U = \frac{1}{2} K \varphi^2$. Gesamtenergie $W = U + T$

T berechnet wie für geschlossenen Kreis $= \frac{1}{2} \mathfrak{L} J^2 \frac{1}{c^2}$

indem Verschiebungsstrom ersetzt gedacht wird durch Konvektions-Leitungsstrom. Nur zulässig bei engem Plattenabstand, nicht bei offenem Kreis

$W = \frac{1}{2} K \varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{L}}{c^2} J^2$. Pro Zeiteinheit entwickelte Joulesche Wärme gleich Energieabnahme.

$$J^2 R = -\frac{dW}{dt} = -K \varphi \dot{\varphi} - \frac{\mathfrak{L}}{c^2} J \dot{J}.$$

Ist e die Gesamtladung d. Kondensators, so ist

$$\varphi = \frac{e}{K} \text{ und } J = -\frac{de}{dt} = -K \dot{\varphi} \text{ also}$$

$$J^2 R = \varphi J - \frac{\mathfrak{L}}{c^2} J \dot{J},$$

$$J R = \varphi - \frac{\mathfrak{L}}{c^2} \dot{J}, \text{ oder differenziert } \dot{\varphi} = -\frac{J}{K} \text{ ergibt}$$

$$\dot{J} R + \frac{J}{K} + \frac{\mathfrak{L}}{c^2} \ddot{J} = 0, \quad \frac{\mathfrak{L} K}{c^2} \ddot{J} + R K \dot{J} + J = 0$$

homogen (dieselbe Gleichung für φ)

Lösungsansatz $J = \mathfrak{C} e^{\lambda t}$ gibt eingesetzt

$$\frac{\mathfrak{L} K}{c^2} \lambda^2 + R K \lambda + 1 = 0, \quad \lambda^2 + \frac{c^2 R}{\mathfrak{L}} \lambda + \frac{c^2}{\mathfrak{L} K} = 0$$

$$\lambda = -\frac{c^2 R}{2 \mathfrak{L}} \pm \sqrt{\frac{c^4 R^2}{4 \mathfrak{L}^2} - \frac{c^2}{\mathfrak{L} K}} \quad 2 \text{ Fälle}$$

1) $\frac{c^4 R^2}{4 \mathfrak{L}^2} > \frac{c^2}{\mathfrak{L} K}$ d. h. $R > \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{K}}$

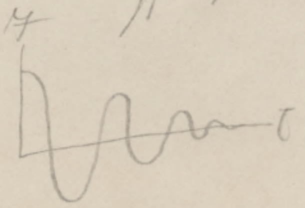
λ_1 und λ_2 reell neg. Strom nimmt exponentiell mit t ab aperiodische Entladung

2) $R < \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\mathfrak{L}}{K}}$, λ_1 u. λ_2 komplex

$$\lambda = -\delta_0 \pm i \nu_0, \quad \delta_0 = \frac{c^2 R}{2 \mathfrak{L}}, \quad \nu_0 = \frac{c}{\sqrt{\mathfrak{L} K}} \sqrt{1 - \frac{c^2 R^2 K}{4 \mathfrak{L}}}$$

$$J = \mathfrak{C} e^{\lambda t} = \mathfrak{C} e^{-\delta_0 t} e^{\pm i \nu_0 t} = \mathfrak{C} e^{-\delta_0 t} \cos(\nu_0 t + \gamma)$$

δ_0 Dämpfungskonstante, ν_0 Eigenfrequenz



$R = 0$, $\nu_0 = \frac{c}{\sqrt{LK}}$; $\lambda = \frac{2\pi c}{\nu_0} = 2\pi\sqrt{LK}$ Thomsonsche Formel

Keine merkliche Dämpfung

Beispiel $K = 10^3$ cm, $L = \frac{1}{100}$ Henry $= 10^7$ cm

$R = 10$ Ohm $= \frac{1}{9}\, 10^{-11} \frac{sec}{cm}$

$R < \frac{2}{c}\sqrt{\frac{L}{K}} = \frac{2.}{3.10^{10}}\sqrt{\frac{10^7}{10^3}} = \frac{2}{3}\, 10^{-8} \frac{sec}{cm}$

$R^2 \frac{c^2 K}{4L} \sim 10^{-7} \ll 1$

$\nu_0 = \frac{c}{\sqrt{LK}} = \frac{3.10^{10}}{\sqrt{10^7 10^3}} = 3.10^5$ Schwingungen in 2π sec

$\delta_0 = \frac{c^2 R}{2L} = \frac{1.\cancel{9}.10^{20}.10^{-11}}{2.\cancel{9}.10^7} = 50$

$\lambda = 2\pi\sqrt{LK} \sim 6.10^5$ cm $= 6$ km

$\delta_0 = 50$ d.h. nach 0,02 sec ist $\delta_0 t = 1$, d.h. Strom auf e^{-1} herabgesunken. Während dessen 1000 Schwingungen

Hertzsche Wellen, nicht gedämpft, Strahlungsdämpfung

$\boxed{\text{37. Stunde}}$

Quasistationäre Ströme

Verlauf zeitlich veränderlicher Ströme in Leitern. Induktionsgesetz:

$$\mathcal{E}^i = \int \mathfrak{E}^i ds = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int \mathfrak{B}_n df$$

Für stationäre Ströme $\mathfrak{B} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}$

$$\Phi = \int \operatorname{rot}_n \mathfrak{A}\, df = \int \mathfrak{A}\, ds, \quad \mathcal{E}^i = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int \mathfrak{A}\, ds$$

d. h. $\quad \mathfrak{A} = \frac{\mu J}{c}\int\frac{ds}{r}$

Gilt nur für stationäre Ströme, für die div i = 0. Ist veränderlich nicht, die Verschiebungsströme von unbekannter Verteilung. Beschränken uns daher auf solche Fälle, wo Verschiebungsströme zu vernachlässigen. Dann der Fall, falls Änderung d. Stromstärke klein für Zeit, die elektromagnet. Störung zu brauchen, um Dimensionen d. Systems zu durcheilen.

Zwei Stromkreise. Abstand so klein, daß gültig ist, so groß, daß für Berechnung von $\mathfrak{A}$ der andere Stromkreis als linear betrachtet wird. μ konstant.

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mu J_1}{c}\int\frac{ds_1}{r}; \quad \Phi_{12} = \int \mathfrak{B}_{n1} df_2 = \int \mathfrak{A}_1 ds_2$$

$$\Phi_{12} = \frac{\mu J_1}{c}\iint\frac{ds_1 ds_2}{r_{12}} = \frac{1}{c} L_{12} J_1,$$

$$L_{12} = \mu\iint\frac{ds_1 ds_2}{r_{12}} = \mu\iint\frac{ds_1 ds_2 \cos\eta}{r_{12}}$$

nur abhängig von Form u. Lage d. Kreise

$$L_{12} = L_{21}, \quad \Phi_{21} = \int \mathfrak{B}_{n2} df_1 = \int \mathfrak{A}_2 ds_1$$

$$\Phi_{21} = \frac{\mu J_2}{c}\iint\frac{ds_2 ds_1}{r_{21}} = \frac{1}{c} L_{21} J_2$$

Hiermit erhalten wir $\mathcal{E}^i$, die bei einer Stromstärkeänderung im zweiten Leiter herrscht. Der gesamte Induktionsfluß $\Phi_1 = \Phi_{21} + \Phi_{11}$. Wie groß Φ_{11}? Nicht linear zu berechnen, gehen aus von Energie $T = \frac{1}{2c}\int(i\,\mathfrak{A})dv$

$\boxed{\text{38. Stunde}}$

T ~~ka~~ steht mit 64 Zeilen:

$$T = \frac{1}{2c}\int(i_1, \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)\,dv_1 + \frac{1}{2c}\int(i_2, \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)\,dv_2$$

$$= \frac{1}{2c}\int(i_1\mathfrak{A}_1)\,dv_1 + \frac{1}{2c}\int(i_1\mathfrak{A}_2)\,dv_1 + \frac{1}{2c}\int(i_2\mathfrak{A}_1)\,dv_2 + \frac{1}{2c}\int$$

Die mittleren Glieder: $\mathfrak{A} = \frac{\mu J}{c}\int\frac{ds}{r}$ linear

$$\frac{1}{2c}\int(i_1\mathfrak{A}_2)\,dv_1 = \frac{J_1}{2c}\int\mathfrak{A}_2\,ds_1$$ weil $i_1\,dv_1 = i q_1\,ds_1 = J_1\,ds_1$

$$\int\mathfrak{A}_2\,ds_1 = \bar{\Phi}_{21} = \frac{\mu J_2}{c}\int\frac{ds_2\,ds_1}{r_{12}} = \frac{1}{c}J_2 L_{21}$$

$$\tfrac{1}{2}T_{21} = \frac{J_1 J_2}{2c^2}L_{21},\quad \tfrac{1}{2}T_{12} = \frac{J_2 J_1}{2c^2}L_{21},\quad T_{12} = \frac{J_1 J_2}{c^2}L_{12}$$

Nun war $\mathfrak{E}^i_{12} = -\frac{1}{c}\frac{d\bar{\Phi}_{12}}{dt} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(J_1 L_{12})$ kann schreiben

$$\mathfrak{E}^i_{12} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{12}}{\partial J_2},\quad \mathfrak{E}^i_{21} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{12}}{\partial J_1}$$

Wir vermuten, daß wir schreiben können:

$T_{11} = \frac{1}{2}\frac{J_1^2}{c^2}L_{11}$ und $\mathfrak{E}^i_{11} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{11}}{\partial J_1}$ und entsprechend für 2.

Erstens: $T_{11} = \frac{1}{2c}\int(i_1\mathfrak{A}_1)\,dv_1$ und setzen

$i_1 = J j_1$, d. h. $j_1 = \frac{i_1}{J}$, sodaß $\int j_1\,df_1 = 1$ über Querschnitt

dann ist $\mathfrak{A}_1 = \frac{\mu}{c}\int\frac{i_1'\,dv_1'}{r} = \frac{\mu}{c}J_1\int\frac{j_1'\,dv_1'}{r}$

$$T_{11} = \frac{1}{2c}\int(i_1\mathfrak{A}_1)\,dv_1 = \frac{J_1}{2c}\int(j_1\mathfrak{A}_1)\,dv_1 =$$

$$= \frac{\mu J_1^2}{2c^2}\iint\frac{j_1 j_1'}{r}\,dv_1\,dv_1' = \frac{1}{2}\frac{J_1^2}{c^2}L_{11},$$ wobei

L_{11} nur von Dimensionen der Leiter abhängt, solange Stromverteilung sich nicht ändert, was bei nicht zu raschen Wechselströmen der Fall ist.

Müssen nachzeigen, daß $\mathfrak{E}^i_{11} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T_{11}}{\partial J_1}$ ~~$= -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(LJ)$~~

Ergibt sich direkt aus Energiesatz. Betrachten wir unseren Stromkreis (ohne Index). Dann ist ohne $\mathfrak{E}^i$

$J^2R = J\mathfrak{E}^e$, die entwickelte Joulesche = Arbeit d. eingeprägt. Ist außerdem $\mathfrak{E}^i$ da, so ist: $J(\mathfrak{E}^i + \mathfrak{E}^e) = J^2R$, $J\mathfrak{E}^i = JR^2 - J\mathfrak{E}^e$

Diese Arbeit kann nur auf der Abnahme von

T spannen, d. h. es muss sein $J E^i = -\frac{dT}{dt}$

Nun war $T = \frac{1}{2}\frac{J^2}{c^2}L$, also $\frac{dT}{dt} = \frac{dT}{dJ}\frac{dJ}{dt}$

$= \frac{J}{c^2} L \frac{dJ}{dt}$ und $E^i = -\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(JL)$

$= -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial J}\right)$, $\Phi = \frac{1}{c}(JL)$ durch Vergleich mit Induktionsgesetz. Betrachten wir jetzt wieder beide Kreise, so ist

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}L_{11}J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + \frac{1}{2}L_{22}J_2^2\right)$$

ferner der gesamte Induktionsfluß durch 1:

$\Phi_1 = \frac{1}{c}(L_{11}J_1 + L_{12}J_2)$, durch 2 $\Phi_2 = \frac{1}{c}(L_{22}J_2 + L_{12}J_1)$

wobei $L_{12} = \mu\iint\frac{ds_1\,ds_2}{r_{12}}$ und $L_{11} = \mu\iint\frac{s_1 s_1'}{r}ds_1\,ds_1'$, L_{22} Dimension $[L] = l$

Also ist $\Phi_1 = c\frac{\partial T}{\partial J_1}$, $\Phi_2 = c\frac{\partial T}{\partial J_2}$ und nach dem Induktionsgesetz:

$E_1^i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_1}$ | $E_2^i = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_2}$

$= -\frac{1}{c^2}\left(L_{11}\frac{dJ_1}{dt} + L_{12}\frac{dJ_2}{dt}\right)$ | $= -\frac{1}{c^2}\left(L_{22}\frac{dJ_2}{dt} + L_{11}\frac{dJ_1}{dt}\right)$

die gesamte Arbeit, die von den E^i geleistet wird, ist $A = E_1^i J_1 + E_2^i J_2 = -J_1\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial J_1}\right) - J_2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial J_2}\right)$

$= -\frac{1}{c^2}\left\{L_{11}J_1\frac{dJ_1}{dt} + L_{12}\left(J_1\frac{dJ_2}{dt} + J_2\frac{dJ_1}{dt}\right) + L_{22}J_2\frac{\partial J_2}{\partial t}\right\}$

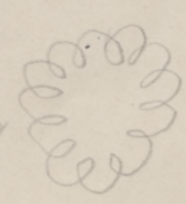
$= -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L_{11}J_1^2 + L_{12}J_1J_2 + L_{22}J_2^2\right) = -\frac{dT}{dt}$

wie es nach dem Energiesatz sein muss.

39. Stunde

Genau analog Lagrangeschen Gleichungen d. Mechanik, falls T kinet. Energie, J_1, J_2 Geschw., $\frac{\partial T}{\partial J_1}, \frac{\partial T}{\partial J_2}$ Impulse, E_1^i, E_2^i verallgemeinerte Kräfte.

Beispiel Berechnung von L



Geschlossene Spule, Windungszahl n, Länge l, Querschnitt q, Kraftlinien geschlossene Kreise im Innern d. Spule. $\mathfrak{H}$ überall d. gleichen Wert, ebenso $|\mathfrak{H}l| = n\mathfrak{J}$, falls das Innere mit Eisenkern erfüllt.

$$\int \mathfrak{h}\, ds = |\mathfrak{h}|\, l = \frac{4\pi n J}{c}, \quad |\mathfrak{h}| = \frac{4\pi n J}{c l}, \quad |\mathfrak{b}| = \mu \frac{4\pi n J}{c l}$$

$$T = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{h}\,\mathfrak{b})\, dv = \frac{\mu}{8\pi}\int |\mathfrak{h}|^2 dv = \frac{\mu |\mathfrak{h}|^2}{8\pi}\int dv = \frac{\mu \mathfrak{h}^2}{8\pi} q l$$

$$T = \frac{\mu q l}{8\pi}\,\frac{16\pi^2 n^2 J^2}{c^2 l^2} = \frac{1}{2c^2}\,\frac{4\pi \mu q n^2}{l} J^2$$

andererseits ist $T = \frac{1}{2c^2} L J^2$ also

$L = \mu \frac{4\pi q n^2}{l}$ gilt angenähert auch für offene gestreckte Spule,

setzen wir $q = \pi r^2$, falls $\sqrt{q} \ll l$, $n \gg 1$

so wird $L = \mu \frac{(2\pi r n)^2}{l} = \mu l \lambda^2$, wenn $\lambda = 2\pi r \frac{n}{l}$

die in der Längeneinheit der Spule enthaltene Drahtlänge.

34. Stunde

Wellen in Halbleitern

$$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}$$

$\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$. Wie groß $\operatorname{div}\mathfrak{E}$?

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0 = \frac{4\pi\sigma}{c}\operatorname{div}\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathfrak{E}$$

Bezeichnen wir wieder $\operatorname{div}\mathfrak{E}$ mit $4\pi\varrho'$, so ist

ϱ' Dichte der freien Elektrizität

$$\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\varrho' + \frac{\partial\varrho'}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{\varrho'}\frac{\partial\varrho'}{\partial t} = -\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon} = -\frac{1}{\vartheta}, \quad \varrho' = \varrho_0' e^{-\frac{t}{\vartheta}}$$

Setzen wir also ϱ_0' d. h. $\operatorname{div}\mathfrak{E}$ zur Zeit $t = 0$ als Null voraus, so bleibt $\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ dauernd gültig

Wellengleichung

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathfrak{E}$$

$$-\Delta\mathfrak{H} = -\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\mathfrak{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2}$$

Ebene fortschr. Welle in x-Richtung, d. h. $\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ Null

$$\frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\mathfrak{E}_y}{\partial x^2},$$ entsprechend $\mathfrak{H}_z$

wir nehmen an, daß $\mathfrak{E}_z = 0$ also auch $\mathfrak{H}_y = 0$, d. h. $\parallel$ z Achse polarisiert.

Telegraphengleichung

Betrachten wir Sinuswellen ([illegible])

d. h. für $x = 0$ setzen wir, $\mathfrak{E}_y = A \sin\nu t + B\cos\nu t$

oder $\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}\cos(\nu t + \delta) = \mathfrak{E}\cos\delta\cos\nu t + \mathfrak{E}\sin\delta\sin\nu t.$

Es ist [illegible] üblich, [illegible] zur bequemeren [illegible] einen komplexen Ausdruck einzuführen, der die [illegible] Diffgl. befriedigt. Dann befriedigt auch der reelle Teil dieses kompl. Ausdrucks die Gleichung, ist somit eine physikalisch brauchbare Lösung derselben. Es handelt sich jetzt zunächst darum, einen einfachen kompl. Ausdruck zu finden, dessen reeller Teil gleich $\mathfrak{E}\cos(\nu t + \delta)$ ist. Der einfachste ist $\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}e^{i(\nu t + \delta)} = a e^{i\nu t}$, wobei $a = \mathfrak{E}e^{i\delta}$. Gilt für $x = 0$. Wir wissen ja, daß [illegible] Welle; versuchen also als Lösung anzusetzen:

35. Stunde

$$\mathfrak{E}_y = a e^{i\nu(t - \frac{p x}{c})}$$

Einsetzen ergibt für p die Bedingung:

$$-\frac{p^2\nu^2}{c^2} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\cdot(-\nu^2) + \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} i\nu, \quad p^2 = \varepsilon\mu - i\frac{4\pi\sigma\mu}{\nu}$$

Es wird p ebenfalls komplex sein, wir setzen

$p = n - i\kappa$, $p^2 = n^2 - \kappa^2 - i2n\kappa$, also bestimmen sich n u. κ aus d. Gl.: $n^2 - \kappa^2 = \varepsilon\mu$, $n\kappa = \frac{2\pi}{\nu}\sigma\mu$

oder wenn wir $\frac{2\pi}{\nu} = \tau$ setzen, $n\kappa = \sigma\mu\tau$ (τ Schwingungsdauer)

$$(n^2+\kappa^2)^2 = (n^2-\kappa^2)^2 + 4n^2\kappa^2; \quad n^2+\kappa^2 = \mu\sqrt{\varepsilon^2+4\sigma^2\tau^2}$$

$$n^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2+4\sigma^2\tau^2}+\varepsilon\right\}, \quad \kappa^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2+4\sigma^2\tau^2}-\varepsilon\right\}$$

Es wird also $\mathfrak{E}_y = a e^{i\nu(t - \frac{px}{c})} = a e^{i\nu(t - \frac{nx}{c} + i\frac{\kappa x}{c})}$

$\mathfrak{E}_y = a e^{-\frac{\kappa\nu x}{c}} e^{i\nu(t - \frac{nx}{c})}$ wovon der reelle Teil [illegible]

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E} e^{-\frac{\kappa\nu x}{c}} \cos\left(\nu t - \frac{\nu}{c} n x + \delta\right)$$

d. h. bei konst. t ist $\mathfrak{E}_y$ period. in x und hat den gleichen Wert für solche Werte von x, für die $\frac{\nu}{c} n x = 2\pi \cdot$ ganze Zahl ist. Den Abstand dieser benachbarten gleichen Werte bezeichnet man als Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi c}{\nu}\frac{1}{n}$

Durch Vergleich von $\cos\{\nu t - \frac{\nu n}{c}x + \delta\}$ mit dem allgem. Ansatz $f(x - wt)$ sehen wir nach der Umformung $\cos\{-\frac{\nu n}{c}(x - \frac{c}{n}t) + \delta\}$, daß $\frac{c}{n}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit w der Welle ist, $w = \frac{c}{n}$. Also $\frac{c}{w} = n$ der Brechungsindex. Physikal. Bedeutung von $e^{-\frac{\kappa\nu x}{c}}$: Abnahme von $\mathfrak{E}_y$ mit wachsendem x. Für $x = \lambda_0$ wird $\frac{\nu x}{c} = 2\pi$, d. h. beim Fortschreiten um λ_0 nimmt $\mathfrak{E}_y$ um den $e^{-\kappa 2\pi}$ ten Teil ab.

$\mathfrak{E}_z = b e^{i\nu(t - \frac{px}{c})}$ erfüllt diff. gl. für $\mathfrak{E}_y$, wobei die Glchg. dieselben Konstanten, auch p, also n und κ dieselben. Dagegen b ebenso wie a unbekannt, wäre bestimmt durch Wert von Amplitude u. Phase für $t = 0$. Nicht beide willkürlich wählbar, da $\mathfrak{E}_y$ u. $\mathfrak{E}_z$ verknüpft durch Maxwellsche Gleichung, z. B.

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \mathrm{rot}_z \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}$$

$\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}_z$ eingesetzt ergibt: $-\frac{\mu}{c}\, b\, i\nu = a \cdot -\frac{i\nu p}{c}$

oder $\frac{b}{a} = \frac{p}{\mu} = \frac{n - i\kappa}{\mu}$. Nun sei $a = \mathcal{E} e^{i\delta_e}$, $b = \mathcal{H} e^{i\delta_h}$

also $\frac{b}{a} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{E}} e^{i(\delta_h - \delta_e)} = \frac{n - i\kappa}{\mu} = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{E}} e^{i\gamma}$ ($e^{i\gamma} = \cos\gamma + i\sin\gamma$)

$\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{E}}\cos\gamma = \frac{n}{\mu}$, $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{E}}\sin\gamma = \frac{-\kappa}{\mu}$, $\frac{\mathcal{H}^2}{\mathcal{E}^2} = \frac{n^2+\kappa^2}{\mu^2}$. Nun war

$n^2+\kappa^2 = \mu\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2}$, also $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{E}} = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon^2+4\sigma^2\tau^2}{\mu^2}}$,

während beim Isolator war $\frac{\mathcal{H}}{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$. Die magnet. u. elektr. Energie sind also nicht mehr gleich.

Ferner ist $\operatorname{tg}\gamma = -\frac{\kappa}{\mu}$, $-\gamma = \operatorname{arctg}\frac{\kappa}{\mu} = \delta_e - \delta_h$

während beim Isolator ($\kappa = 0$) die Phasendiff. Null war.

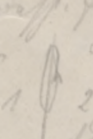
Absorption wie bei Leitern, absorbierte Energie wird Joulesche Wärme. Dies nur wirklich außer bei Elektrolyten. Indes auch bei Metallen ergibt Zusammenhang zwischen κ und σ (Parallelismus!, ε!) für Lichtwellen nicht bestätigt. Nicht recht ε zu schreiben, weil für lange Wellen richtig, falls ε vernachlässigt wird. Also Beziehung $i = \sigma\mathfrak{E}$ aufzugeben, weil σ nicht dasselbe für stationären Strom u. Licht.

$n = \kappa = \sqrt{\mu\sigma\tau}$

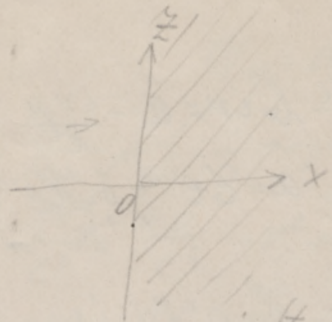
$\boxed{\text{36 Stunden}}$

Metallreflexion

n und κ bei Metallen direkt kaum meßbar, aber aus Reflexions Koeffizient resp. [illegible] Grenzbedingungen ergeben sich aus



Linienintegral gleich Gesamtstrom durch umschlossene Fläche, also $\frac{d\mathfrak{E}}{dt}$. Soll $\int \mathfrak{H}\, ds$ endlich bleiben bei Zusammenziehen, so muß, da Fläche hierbei ∞ klein wird, Stromdichte ∞ groß werden. Das ist bei $\frac{d\mathfrak{E}}{dt}$ unmöglich, falls σ resp. ε endlich. Dann ist $\int \mathfrak{H}\, ds = 0$, d.h. $\mathfrak{H}_{t_1} = \mathfrak{H}_{t_2}$. Ebenso falls $\mathfrak{H}$ u. $\frac{d\mathfrak{H}}{dt}$ u. μ endlich, $\mathfrak{E}_{t_1} = \mathfrak{E}_{t_2}$. Tangentialkomp. von $\mathfrak{E}$ u. $\mathfrak{H}$ an Grenzfläche stetig.



Ebene Welle in z Richtung polarisiert, wird teils reflektiert, teils dringt sie in das Metall ein. 3 Wellen

1) einfallende im Vakuum

$\mathfrak{E}'_y = a' e^{i\nu(t - \frac{x}{c})}$ da im Vakuum $n = 1$, $\mathfrak{H}'_z = \mathfrak{E}'_y$ †

weil $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} = 1$

2) reflektierte: $\mathfrak{E}''_y = a'' e^{i\nu(t + \frac{x}{c})}$, $\mathfrak{H}''_z = -\mathfrak{E}''_y$

weil $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$, $-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}$

3) eindringende $\mathfrak{E}_y = a\, e^{i\nu(t - \frac{px}{c})}$, $\mathfrak{H}_z = a \frac{p}{\mu} e^{i\nu(t - \frac{px}{c})}$

$p = n - i\kappa$

Reflexionskoeffizient: Verhältnis von reflektierter zu einfallender Energie. Energie im Vakuum prop. $|a'|^2$ resp. $|a''|^2$, $r = \frac{|a''|^2}{|a'|^2}$. Tangentialkomp. für $x = 0$ stetig ergibt:

$\mathfrak{E}'_y + \mathfrak{E}''_y = \mathfrak{E}_y$, $a' + a'' = a$, $\mathfrak{H}'_z + \mathfrak{H}''_z = \mathfrak{H}_z$, $a' - a'' = \frac{n - i\kappa}{\mu} a$

$a' = \frac{a}{2}\left\{1 + \frac{n - i\kappa}{\mu}\right\}$, $a'' = \frac{a}{2}\left\{1 - \frac{n - i\kappa}{\mu}\right\}$

$r = \frac{|a''|^2}{|a'|^2} = \frac{|\mu - n + i\kappa|^2}{|\mu + n - i\kappa|^2} = \frac{(\mu - n)^2 + \kappa^2}{(\mu + n)^2 + \kappa^2}$ †

$n^2 = \frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2\tau^2} + \varepsilon\right\}$

$= \frac{\mu}{2}\left\{2\sigma\tau\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2\tau^2}\right) + \varepsilon\right\}$

$= \sigma\tau\left(1 + \frac{\varepsilon}{2\sigma\tau} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2\tau^2}\right)$

† $a = |a| e^{i\delta} = |a|\cos\varphi + i|a|\sin\varphi = (\mu - n) + i\kappa$, $|a|\cos\varphi = \mu - n$

$|a|^2 = (\mu - n)^2 + \kappa^2$, $|a|\sin\varphi = \kappa$

$n = \kappa = \sqrt{\sigma\tau}$

$n = \kappa = \sqrt{\mu\sigma\tau}$, $\mu = 1$, $r = \frac{1 - 2\sqrt{\sigma\tau} + 2\sigma\tau}{1 + 2\sqrt{\sigma\tau} + 2\sigma\tau}$

$r = 1 - \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}}$ $\sqrt{\sigma\tau} \gg 1$ [illegible]

$\lambda = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ cm, $\tau = \frac{\lambda}{c} = 4 \cdot 10^{-13}$

$\sigma = 5{,}14 \cdot 10^{17}$, $2\sigma\tau = 4{,}11 \cdot 10^{4}$

$1 - r = \frac{2}{\sqrt{\sigma\tau}} = 1{,}4 \cdot 10^{-2}$ [illegible]

[illegible] $1 - r$ [illegible]

[illegible] prop. [illegible] $1 - r$

[illegible] $= \sigma$ [illegible] σ [illegible]

ε! [illegible]

[illegible] Rolle [illegible]

$\mu = 1$ [illegible]

[illegible] μ [illegible]

[illegible] $\frac{n}{\varepsilon} = \sqrt{2\sigma\tau}$, $\delta_e - \delta_h = \operatorname{arctg}\frac{\kappa}{n} = \operatorname{arctg} 1$

$\delta_e - \delta_h = 45^\circ$

$e^{-\frac{2\pi\kappa x}{\lambda}}$ [illegible] $e^{-2\pi}$ [illegible] Abstand $x = \frac{\lambda}{\kappa} = \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma\tau}}$

[illegible] $e^{-4\pi}$ [illegible] $d = \frac{\lambda}{\sqrt{\sigma\tau}} = c\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$

$\frac{1}{\sqrt{\sigma\tau}} = \frac{1}{\sqrt{5{,}14 \cdot 10^{8}}} = 0{,}44 \cdot 10^{-4}$, $\lambda = 30$ cm, $d = 1{,}32 \cdot 10^{-3}$ cm

d prop. $\sqrt{\tau}$

31. Stunde

Dimensionen, Maßsysteme.

Gaußsches elektrostat. u. magnetost. Maßsystem. Einheit d. El.menge, die auf eine gleiche im Abstand 1cm Kraft 1dyn ausübt, ebenso Einheitspol. Coulomb

$[K] = \frac{[e^2]}{[r^2]} = m\,l\,t^{-2}$, $[e] = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-1} = [p]$ Polst. eines Magnet.

$[\mathfrak{E}] = \frac{[K]}{[e]} = m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1} = [\mathfrak{H}]$, ε u. μ reine Zahlen

$[J] = \frac{de}{dt} = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}$ Welche Dimens. hat c?

$\oint_C \mathfrak{H}\, ds = \frac{4\pi}{c} J$, $[c] = \frac{[J]}{[\mathfrak{H}][s]} = \frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} t^{-2}}{m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1} l}$

$[c] = l\,t^{-1}$ Dimens. einer Geschwindigkeit

$c = 3\cdot 10^{10} \frac{cm}{sec} = 300\,000 \frac{km}{sec}$ Lichtgeschw.

Kohlrausch u. Weber, Zusammenhang [illegible].

Gaußsches Maßsystem, [illegible] ausschließlich benutzen.

Elektromagnet. Maßsystem:

$[\mathfrak{H}] = m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$, μ reine Zahl, $c = 1$ gesetzt, reine Zahl

$\frac{J}{c} = J_{elm}$, $c = \frac{J}{J_{elm}}$, Im elm. Maßsystem (prakt. $\frac{1}{10}$, Amp)

$[J] = [\mathfrak{H}][s] = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-1}$, $[J] = \frac{de}{dt}$

$[e]_{elm} = [J][t] = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}$, ε nicht reine Zahl, sond. Dimens.

$[K] = \frac{[e^2]}{[r^2]} \frac{1}{[\varepsilon]}$, $[\varepsilon] = \frac{[e^2]}{[K][r^2]} = \frac{m\,l}{m\,l\,t^{-2} l^2} = l^{-2} t^2$ $\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ statt 1

Elektrostat. Maßsystem (mitunter wird das Gaußsche [illegible] bezeichnet): $[\mathfrak{E}] = m^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} t^{-1}$, ε und $c = 1$ reine Zahlen

$[e]$ und $[J]$ wie bei Gauß, $[\mathfrak{H}] = \frac{[J]}{[l]} = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}} t^{-2}$, $[p] = \frac{[K]}{[\mathfrak{H}]} = m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}$

$[K] = \frac{[p^2]}{[r^2]} \frac{1}{[\mu]}$, $[\mu] = \frac{[p^2]}{[K][r^2]} = \frac{m\,l}{m\,l\,t^{-2} l^2} = l^{-2} t^2$ $\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ statt 1

$|\mathfrak{K}| = e|\mathfrak{E}|$, Einheit der Feldst. die, die Kraft 1 dyn auf Einheitsladung gibt.

$\mathfrak{E}_r = \frac{\mathfrak{E}_g}{\sqrt{4\pi}}$

Rationelles Maßsystem (Heaviside, Lorentz) geht aus Gaußschem hervor, indem man die Einheit d. El.menge [illegible], Zahlenfaktor $\sqrt{4\pi}$. Zwischen $|\mathfrak{K}| = \frac{1}{4\pi}\frac{e^2}{r^2}$, d.h. Einheit d. El.m., die auf [illegible] Kraft $\frac{1}{4\pi}$ dyn ausübt. $e_r = e_g\sqrt{4\pi}$, und daraus wird

$\rho_r = \rho_g\sqrt{4\pi}$, $\mathfrak{E}_r = \frac{\mathfrak{E}_g}{\sqrt{4\pi}}$, $\Delta\varphi_r = -\rho_r$ statt

$\Delta\varphi_g = -4\pi\rho_g$, dafür aber $\varphi_r = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\rho_r}{r}\,dv$.

Aus den Differentialformeln 4π heraus, tritt in Integr. auf.

$$|\mathfrak{K}| = \frac{1}{4\pi}\frac{e_r^2}{r^2} = \frac{e_g^2}{r^2},\quad e_r = e_g\sqrt{4\pi},\quad |\mathfrak{E}_r| = \frac{|\mathfrak{K}|}{|e_r|} = \frac{|\mathfrak{K}|}{e_g\sqrt{4\pi}} = \frac{|\mathfrak{E}_g|}{\sqrt{4\pi}}$$

32. Stunde

Elektromagnet. Lichttheorie, Nachweis für Verschiebungsstrom, Hertz.
Homogenes isotropes Dielektrikum:

$\varepsilon = \text{konst}, \ \mu = \text{konst}, \ \rho = 0, \ \sigma = 0, \ \mathfrak{E}^e = 0$ also $i = 0$

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0$$

Wir betrachten jetzt einen elektromagn. Vorgang bei dem $\mathfrak{E}$ u. $\mathfrak{H}$ für alle Punkte einer Ebene den gleichen Wert haben. Wählen wir diese Ebene zur y,z Ebene eines rechtw. Koord. systems, so werden $\frac{\partial}{\partial y}$ u. $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Man bezeichnet diesen Vorgang als ebene (homogene) Welle.

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial t} = 0, \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathfrak{H}_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}, \quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x}$$

$\mathfrak{E}_x$ u. $\mathfrak{H}_x$ räumlich u. zeitlich konstant, d.h. konstantes überlagertes Feld von äußeren Ladungen oder Strömen, interessiert uns nicht, setzen $\mathfrak{E}_x = 0, \mathfrak{H}_x = 0$.
Zwei ganz analoge Gruppen, die $\mathfrak{E}_y$ u. $\mathfrak{H}_z$, sowie $\mathfrak{E}_z$ u. $\mathfrak{H}_y$ verknüpfen.

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}, \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} \quad \Bigg| \quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}, \quad \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x}$$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{E}_y}{\partial x^2} \quad \Bigg| \quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial t^2} = \frac{c}{\mu}\frac{\partial^2 \mathfrak{E}_z}{\partial x^2}$$

$$\mathfrak{E}_y = f(x - wt) + g(x + wt), \quad w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\mathfrak{H}_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\{f(x - wt) - g(x + wt)\right\}$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{c}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2},$$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{H}_z}{\partial x^2},$$

33. Stunde

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H},\quad -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{E},\quad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0,\quad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{H} - \Delta\mathfrak{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \operatorname{rot}\mathfrak{E}}{\partial t} = -\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} = \Delta\mathfrak{H},\quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} = \Delta\mathfrak{E},$$ ebene Welle $\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ Null

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\mathfrak{H}_x}{\partial x^2} = 0,\quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\mathfrak{H}_y}{\partial x^2},\quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\mathfrak{H}_z}{\partial x^2}$$

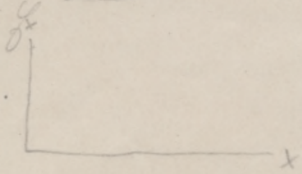
$$\mathfrak{H}_x = \text{konst} = 0,\quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}_y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\mathfrak{E}_y}{\partial x^2},\quad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\mathfrak{E}_z}{\partial x^2}$$

Wir betrachten eine dieser Gleichgn. z. B. die für $\mathfrak{E}_y$.
Allgem. Integral: $\mathfrak{E}_x = f(x - wt) + g(x + wt)$, $w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

v daß Lösg. das allgem. in Form d. Schwingg

[illegible] durch Einsetzen $\frac{1}{w^2}(+w^2 f'' + w^2 g'') = f'' + g''$

Bedeutung von $f(x - wt)$: Für $t = 0$ gehört zu $x = x_0$ der Wert $\mathfrak{E}_x^0 = f(x_0)$
zur Zeit $t = t$ gehört denselben Wert von $\mathfrak{E}_x$ zur Koord. $x - wt = x_0$
$x = x_0 + wt$, d. h. die ganze Kurve $\mathfrak{E}_x^0 = f(x_0)$ verschiebt sich
mit der Geschw. w längs x Achse in Richtg wachsender x ohne Form zu
ändern. Welle. Entsprechend $g(x + wt)$ in entgegengesetzter Richtg.



Für $\mathfrak{H}_z, \mathfrak{E}_z, \mathfrak{H}_y$ Lösg $f' + g', f'' + g'', f''' + g'''$ nicht beliebig
wählbar. Durch $\mathfrak{E}_y$ ist $\mathfrak{H}_z = f' + g'$ mitbestimmt, denn nach

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x};\quad \frac{\varepsilon}{c}(-wf + wg) = -f' - g',\quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(f - g) = f' + g'$$

$$-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x},\quad -\frac{\mu}{c}(-wf' + wg') = f + g,\quad \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(f' - g') = f + g$$

Beide Gleichgn erfüllen wir durch den Ansatz $f' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, f$, $g' = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, g$

$$\mathfrak{E}_y = f_1(x - wt) + g_1(x + wt),\quad \mathfrak{H}_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\{f_1(x - wt) - g_1(x + wt)\right\}$$

$$\mathfrak{E}_z = f_2(x - wt) + g_2(x + wt),\quad \mathfrak{H}_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left\{f_2(x - wt) - g_2(x + wt)\right\}$$

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial x}$$

$$\frac{\varepsilon}{c}(-wf_2 + wg_2) = -f_2' + g_2'$$

auch direkt [illegible] Gleichg auf ver. [illegible] y Achse so, daß $\mathfrak{E}_z = 0$, so bleibt nur $\mathfrak{H}_y = 0$.

Betrachten wir nur die in einer Richtg, etwa der wachsenden x, fortschreitenden Wellen, so ist

$$\mathfrak{E}_y\mathfrak{H}_y + \mathfrak{E}_z\mathfrak{H}_z = 0 = (\mathfrak{E}\mathfrak{H})\ \text{d. h.}\ \mathfrak{E} \perp \mathfrak{H}$$

Maxwellsche Relation

$w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ Vakuum $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $w = c$

für Lichtwellen $\mu = 1$, $w = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\frac{c}{w} = n$ Brechungsindex, $n^2 = \varepsilon$
Dispersion, Gültigkeitsbereich, [illegible]

In Welle Energie pro cm³ $\psi = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)$. Nun ist

$$\mathfrak{H}_y^2 + \mathfrak{H}_z^2 = \frac{\varepsilon}{\mu}(\mathfrak{E}_z^2 + \mathfrak{E}_y^2),\quad \mu\mathfrak{H}^2 = \varepsilon\mathfrak{E}^2,\quad \mathfrak{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}$$

Pro Zeit tritt durch 1 cm² die Energie $\psi w = \frac{1}{8\pi}(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

$= \frac{c}{4\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\mathfrak{E}^2 = \frac{c}{4\pi}|\mathfrak{E}||\mathfrak{H}|$ Wir hatten dafür den Poynting-
schen Vektor $\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$ abgeleitet, der mit Rücksicht darauf
$\mathfrak{E} \perp \mathfrak{H}$, identisch.

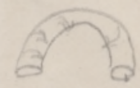
29. Stunde

Solenoid, geschlossen n Windungen

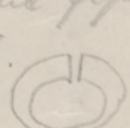
† Kraftlinien geschlossene Kurven, die Strom umschlingen. Nur im Innern $\mathfrak{H} \neq 0$. Erkennt man durch Idealisierung. Zunächst n geschlossene Kreisströme, zusammenfließend zu Rohr. Die einzigen geschlossenen Kurven, die Strom umschließen, die möglich sind, sind solche im Innern der Röhre. Außen $\mathfrak{H}=0$ annähernd auch für wirkliches Solenoid.

† $\mu = \text{konst}$, $\operatorname{div}\mathfrak{H}=0$, $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi i}{c}$, also

$$\int \mathfrak{H}_s\, ds = |\mathfrak{H}|\, l = \frac{4\pi\, nJ}{c}, \quad |\mathfrak{H}| = \frac{4\pi}{c}\frac{nJ}{l}$$



Biegen wir Solenoid auf, so wird $\mathfrak{H}$ außen klein sein, und $\mathfrak{H}$ im Innern annähernd denselben Wert haben (jedoch an den Enden nicht, sondern etwa halb so groß). Ist q Querschnitt, so ist $|\mathfrak{H}|\, q$ die Zahl der an den Enden austretenden Kraftlinien $= 4\pi m$, d.h. gleich Magnet an beiden Enden Magnetismusmenge m.

Geschlossenes Solenoid mit Eisenkern ausgefüllt, $\mathfrak{B} = \mu\, \mathfrak{H}_0$.  Schmaler Spalt $\mathfrak{H} = \mu\, \mathfrak{H}_0$. Gilt nur für ∞ schmalen Spalt. Breite Spaltbreite s, Krümmung vernachlässigt

$$\mathfrak{H}_0 = \frac{4\pi}{c}\frac{nJ}{l}$$

$$\mathfrak{H}_0' l + \mu \mathfrak{H}_0' s = \frac{4\pi}{c} nJ \text{ magnetomotorische Kraft}$$

$$\mathfrak{H}_0' = \frac{4\pi nJ}{c(l+\mu s)}; \quad \mathfrak{H}' = \frac{4\pi nJ\mu}{c(l+\mu s)}$$

Die beiden Hauptgleichungen

für stationären Strom $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} i$

$\operatorname{div} i = 0$, für nichtstationären gilt

[illegible] Leitungsstrom + Verschiebungsstrom $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$

Maxwell's Ansatz $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\mathfrak{c}$, wobei

$\mathfrak{c} = i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$, $\operatorname{div}\mathfrak{c} = 0$,

$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} i + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}$ (Konvektionsstrom)

Falls $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, $\operatorname{rot}\mathfrak{H} =$

Faradays Induktionsgesetz

Aus Energiesatz. Definieren zunächst

Induktionsfluß $\Phi = \int\mathfrak{B}_n\, df$ unabhängig von Gestalt der Fläche

durchgeschlossen [illegible] Leiter wegen $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$

Besteht im Leiter eingeprägte EMK

$E^e = \int\mathfrak{E}^e ds$, so fließt Strom $E^e = JR$

Wird Φ [illegible] Betrage $-\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}$, d.h.

E^e auf [illegible]

es fließt ein [illegible] Strom, der sich bestimmt

aus $RJ = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = E^i \; (+E^e)$ falls außerdem noch E^e da

$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e - \mathfrak{E}^i$

$\oint\mathfrak{E}\, ds = \underbrace{\int\mathfrak{E}^s ds}_{=0} + \int\mathfrak{E}^e ds + \underbrace{\int\mathfrak{E}^i ds}_{E^i}$

$E^i = \int(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e)\, ds = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\mathfrak{B}_n\, df$

$= \int\operatorname{rot}_n(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e)\, df = -\frac{1}{c}\int\frac{\partial\mathfrak{B}_n}{\partial t}\, df$

falls Leiter fest ruht

$\operatorname{rot}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t}$

30. Stunde

Hauptgleichungen:

$$\text{I} \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi i}{c} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \qquad \text{II} \quad \operatorname{rot}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$$

elektr. Strom erzeugt Magnetfeld magnet. [illegible] $\mathfrak{E}$

$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$, $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho$ dazu.

($\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ folgt aus II: $\operatorname{div} \operatorname{rot}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e) = 0 = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \mathfrak{B})$

d.h. $\operatorname{div} \mathfrak{B} = \text{konst}$ räumlich und zeitlich; $\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$

(wir können $\text{konst} = 0$ setzen).

$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho$ folgt mit Hilfe Kontinuitätsgleichung aus I.

$e = \int \rho \, dv$, geschlossene Fläche $\frac{\partial e}{\partial t} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = -\int i_n \, df$

(n äußere Normale) $= -\int \operatorname{div} i \, dv$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} i = 0$

$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} i + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{D}$ aus I

gibt, $-\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathfrak{D} = 0$, $\operatorname{div} \mathfrak{D} - 4\pi\rho = \text{konst} = 0$)

Hauptgleichungen brauchbar, solange nicht Zusammenhang zwischen i u. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ u. $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ u. $\mathfrak{B}$ bekannt.

Wir setzen $i = \sigma \mathfrak{E}$, $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$. Materialgl.

Das sind 9 Gleichungen, dazu die 6 Hauptgl. u. $\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho$

($\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$ Folgerung) zusammen also 16 Gleichungen.

Unbekannte: je 3 Komponenten $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$ und ρ, ebenfalls 16

Gleichungssystem vollständig bestimmt.

Materialgl. abzuändern: Kristalle, rasche Schwingg.

Energiesatz

Hatten angesetzt: Energie $W = \frac{1}{8\pi}\int\{(\mathfrak{E}\mathfrak{D}) + (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\}dv$ $= \frac{1}{8\pi}\int(\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}^2)\,dv$. Für abgeschlossenes System muß die Zunahme von W gleich der von $\mathfrak{E}^e$ geleisteten Arbeit $\frac{dA}{dt}$ weniger der pro Zeiteinheit entwickelten Joule'schen Wärme Q sein. Wir werden aus Hauptgleichungen folgern, dass die elektr. u. magnet. Vorgänge sich mit Geschw. c fortpflanzen, wir können also abgeschlossenes System durch ∞ ferne Fläche realisieren. $\frac{dW}{dt} = \frac{dA}{dt} - Q$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int\left(\varepsilon\mathfrak{E}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \mu\mathfrak{H}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}\right)dv,$$ Hauptgl.:

$$\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} - 4\pi\sigma\mathfrak{E}, \quad \mu\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = -c\,\mathrm{rot}(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e)$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{c}{4\pi}\int\{\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} + \mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}^e\}dv - \int\sigma\mathfrak{E}^2 dv$$

$$\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\mathrm{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}], \quad \mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}^e = \mathfrak{E}^e\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} + \mathrm{div}[\,]$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{c}{4\pi}\int -\mathrm{div}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]\,dv + \frac{c}{4\pi}\int\mathfrak{E}^e\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}\,dv + \frac{c}{4\pi}\int\mathrm{div}[\mathfrak{E}^e\mathfrak{H}]\,dv - Q$$

$$= \frac{-c}{4\pi}\int[\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e, \mathfrak{H}]_n\,df + \int(\mathfrak{E}^e i)\,dv - Q$$

$\int\mathfrak{S}_n\,df$ über ∞ ferne Fläche $= 0$, $\int(\mathfrak{E}^e i)\,dv = 0$ falls $\mathfrak{E}^e = 0$

dann ist $\frac{dW}{dt} = -Q$. Falls $\mathfrak{E}^e \neq 0$ gibt $\int(\mathfrak{E}^e i)\,dv = \frac{dA}{dt}$ die von den $\mathfrak{E}^e$ geleistete Arbeit. Falls Fläche im Endlichen gibt $\int\frac{c}{4\pi}[(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e), \mathfrak{H}]_n\,df$ die pro Zeiteinheit durch die Oberfläche austretende Energie $\int\mathfrak{S}_n\,df$.

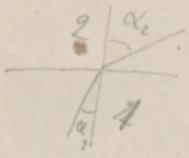
$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[(\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^e), \mathfrak{H}]$$ Poyntingscher Vektor

27. Stunde

Brechungsgesetz der magnetischen Kraftlinien

Stromloses Gebiet: $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$, $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0$

d.h. Normalkomponente von $\mathfrak{B}_x$ und Tangentialkomponente von $\mathfrak{H}$ stetig

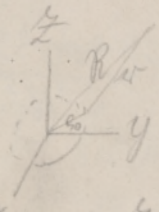


$$|\mathfrak{B}_1|\cos\alpha_1 = |\mathfrak{B}_2|\cos\alpha_2 \qquad \mathfrak{B} = \mu\,\mathfrak{H}$$

$$|\mathfrak{H}_1|\sin\alpha_1 = |\mathfrak{H}_2|\sin\alpha_2\ ; \quad \mu_1\operatorname{ctg}\alpha_1 = \mu_2\operatorname{ctg}\alpha_2$$

$\mu_1 : \mu_2 = \operatorname{tg}\alpha_1 : \operatorname{tg}\alpha_2$ genau entsprechend den elektr. Kraftlinien an ladungsfreier Grenzfläche

Unendl. kleiner Kreisstrom



$$|R| \gg \varrho_0 \quad |r| \gg \varrho_0$$

$$\mathfrak{H} = \frac{J}{c}\int\frac{[ds, r]}{r^3}, \quad \cancel{\mathfrak{H}_x = \frac{J}{c}\int\left[ds, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right]}$$

$$\mathfrak{H}_x = \frac{J}{c}\int\left(d\eta\,\frac{z-\zeta}{r^3} - d\zeta\,\frac{y-\eta}{r^3}\right)$$

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{R^3} + \xi\left(\frac{\partial\frac{1}{r^3}}{\partial x}\right)_R + \dots = \frac{1}{R^3} - \frac{3\xi x}{R^5} - \dots$$

$$\mathfrak{H}_x = \frac{J}{c}\int\left(\frac{z-\zeta}{R^3} - \frac{3\xi x z}{R^5} - \dots\right)d\eta - \frac{J}{c}\int\left(\frac{y-\eta}{R^3} - \frac{3\xi x y}{R^5} - \dots\right)d\zeta$$

$$= -\frac{J}{c}\,\frac{3xz}{R^5}\,\pi\varrho_0^2$$

$$\mathfrak{H}_y = -\frac{J}{c}\,\frac{3yz}{R^5}\,\pi\varrho_0^2$$

$$\mathfrak{H}_z = \frac{J}{c}\int\left(d\xi\,\frac{y-\eta}{r^3} - d\eta\,\frac{x-\xi}{r^3}\right)$$

$$= \frac{J}{c}\int\left(\frac{y-\eta}{R^3} - \frac{3\xi x y}{R^5} - \dots\right)d\xi - \frac{J}{c}\int\left(\frac{x-\xi}{R^3} - \frac{3\xi x^2}{R^5} - \dots\right)d\eta$$

$$= +\frac{J}{c}\left(-\frac{\pi\varrho_0^2}{R^3} - \frac{3y^2\pi\varrho_0^2}{R^5}\right) - \frac{J}{c}\left(-\frac{\pi\varrho_0^2}{R^3} - \frac{3x^2}{R^5}\pi\varrho_0^2\right)$$

$=$

$$\mathfrak{A} = \frac{J}{c}\int \frac{d\mathfrak{s}}{r}, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{\xi x}{R^3} - \frac{\eta y}{R^3}$$

$$\mathfrak{A}_x = \frac{J}{c}\int \frac{d\xi}{R} - \frac{\xi x}{R^3}d\xi - \frac{\eta y}{R^3}\, d\xi = -\frac{J}{c}\frac{y}{R^3}\pi\rho_0^2$$

$$\mathfrak{A}_y = \qquad\qquad = +\frac{J}{c}\frac{x}{R^3}\pi\rho_0^2$$

$$\mathfrak{A}_z = \qquad\qquad = 0$$

$$\mathfrak{H}_x = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} = \frac{J}{c}\pi\rho_0^2 \frac{\partial \frac{x}{R^3}}{\partial z} = -\frac{J}{c}\pi\rho_0^2\frac{3xz}{R^5}$$

$$\mathfrak{H}_y = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x} = \qquad = -\frac{J}{c}\pi\rho_0^2\frac{3yz}{R^5}$$

$$\mathfrak{H}_z = \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y} = -\frac{J}{c}\pi\rho_0^2\left(\frac{\partial \frac{x}{R^3}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{y}{R^3}}{\partial y}\right)$$

$$= -\frac{J}{c}\pi\rho_0^2\left(\frac{1}{R^3} - \frac{3x^2}{R^5} - \frac{1}{R^3} + \frac{3y^2}{R^5}\right) = -\frac{J}{c}\pi\rho_0^2\frac{3y^2-3x^2}{R^5}$$

$$\varphi = -\int\left(\tau\mathfrak{n}, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)df = -\tau\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,df$$

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} -$$

28. Stunde

$\mathfrak{B}_n$ und $\mathfrak{H}_t$ stetig (s. Anfang vor. Std.)

Energie und ponderomot. Kräfte

Elektrostat. Energie: $U = \frac{1}{2}\sum e_i \varphi_i = \frac{1}{2}\int \varphi\,\omega\, df$

$= \frac{1}{2}\int \varphi\,\varrho\, dv$ und $U = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{E}\mathfrak{D})\,dv = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon\,\mathfrak{E}^2\, dv$

Letztere Darstellung ohne weiteres übertragbar

$$T = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\,dv = \frac{1}{8\pi}\int \mu\,\mathfrak{H}^2\, dv$$

Erstere nicht, da kein wahrer Magnet. dafür Ströme.

Umformung: $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{B} = \operatorname{rot}\mathfrak{A}$

$$T = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{A})\,dv$$

$\operatorname{div}[\mathfrak{A}\mathfrak{H}] = \mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{H}$, denn dies ist

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{A}_y\mathfrak{H}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{H}_y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{A}_z\mathfrak{H}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{H}_z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathfrak{A}_x\mathfrak{H}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{H}_x\right)$$

$$= \mathfrak{H}_x\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z}\right) + \mathfrak{H}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right) + \mathfrak{H}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial y}\right)$$

$$- \mathfrak{A}_x\left(\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{H}_y}{\partial z}\right) -$$

$$T = \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}[\mathfrak{A}\mathfrak{H}]\,dv + \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{A}\operatorname{rot}\mathfrak{H})\,dv$$

$$= \underbrace{\frac{1}{8\pi}\int [\mathfrak{A}\mathfrak{H}]_n\, df}_{\substack{=0 \text{ wenn bis } \infty \\ [\mathfrak{A}\mathfrak{H}] \sim \frac{1}{r^3}}} + \frac{1}{8\pi}\int \left(\mathfrak{A}\,\frac{4\pi i}{c}\right) dv$$

$T = \frac{1}{2c}\int (\mathfrak{A}\,i)\,dv$ analog $\frac{1}{2}\int \varphi\,\varrho\, dv$

Beweis für Ansatz später aus Folgerungen.

Das Gleiche gilt für ponderomot. Kraft

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{8\pi}\int \left\{2\,\mathfrak{H}(\mathfrak{B}n) - n(\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\} df$$

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{1}{8\pi}\int \left\{2(\nu\mathfrak{H})(\mathfrak{B}n) - (\nu n)(\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\} df$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int \left\{2(\nu\mathfrak{H})\mathfrak{B} - \nu(\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right\}_n df$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int \left\{\operatorname{div}\left((\nu\mathfrak{H})\mathfrak{B}\right) - \tfrac{1}{2}\operatorname{div}\left(\nu(\mathfrak{H}\mathfrak{B})\right)\right\} dv$$

$$\operatorname{div}\left((\nu\mathfrak{H})\mathfrak{B}\right) = \mathfrak{B}\operatorname{grad}(\nu\mathfrak{H}) + \cancel{(\nu\mathfrak{H})\operatorname{div}\mathfrak{B}}$$

$\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{h}) = (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\mathfrak{h} + [\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{h}]$

$\mathfrak{B}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\,\mathfrak{h}) = \mathfrak{B}.(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\mathfrak{h} + \mathfrak{B}[\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{h}]$

Nun ist $\mathfrak{B}.(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\mathfrak{h} = \frac{1}{2}\,\mathrm{div}(\mathfrak{v}(\mathfrak{h}\mathfrak{B}))$ also

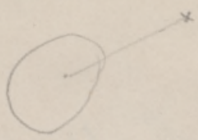
$\mathrm{div}((\mathfrak{v}\,\mathfrak{h})\mathfrak{B}) - \frac{1}{2}\,\mathrm{div}(\mathfrak{v}(\mathfrak{h}\mathfrak{B})) = \mathfrak{B}[\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{h}]$

$= \mathfrak{v}[\mathrm{rot}\,\mathfrak{h}, \mathfrak{B}] = \mathfrak{v}\left[\frac{4\pi i}{c}, \mathfrak{B}\right]$

$\mathfrak{K}_{\mathfrak{v}} = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{v}\left[\frac{4\pi i}{c}, \mathfrak{B}\right] dv$

$\mathfrak{K} = \int \left[\frac{i}{c}, \mathfrak{B}\right] dv$

25. Stunde



Vektorpotential magnetisierter Körper

$$\varphi = -\int\left(\mathfrak{M}\,\mathrm{grad}\,\tfrac{1}{r}\right)dv = -\int\left(\mathfrak{M}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \mathfrak{M}_y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{M}_z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right)dv$$

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \int\left(\mathfrak{M}_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathfrak{M}_y\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y} + \mathfrak{M}_z\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\,\partial z}\right)dv$$

$$-\mathfrak{M}_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} - \mathfrak{M}_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2} - \mathfrak{M}_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2} = \mathfrak{M}_x\Delta\tfrac{1}{r} = 0$$

Integration geht über Quellpunkt, differentiiert nach Aufpunkt

$\Delta\frac{1}{r} = 0 \quad (\Delta\varphi = 0)$

$$\mathfrak{H}_x = \int\left\{\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(\mathfrak{M}_y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \mathfrak{M}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)}_{[\mathrm{grad}\frac{1}{r},\,\mathfrak{M}]_z} - \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\left(\mathfrak{M}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \mathfrak{M}_z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)}_{[\mathrm{grad}\frac{1}{r},\,\mathfrak{M}]_y}\right\}dv$$

$$\mathfrak{H}_x = \int \mathrm{rot}_x\left[\mathrm{grad}\,\tfrac{1}{r}, \mathfrak{M}\right]dv$$

$\mathfrak{H} = \mathrm{rot}\int\left[\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}, \mathfrak{M}\right]dv$ weil rot auf Aufpunkt bezüglich

$\mathfrak{A} = \int\left[\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}, \mathfrak{M}\right]dv$ damit $\mathfrak{H} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$

Für homogene Doppelschicht $\mathfrak{M}\,dv = \tau\,\mathfrak{n}\,df$

Also $\mathfrak{A} = \tau\int\left[\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}, \mathfrak{n}\right]df$

Um diesen Ausdruck für $\mathfrak{A}$ in ein Integral über die Randkurve der Doppelschicht umzuwandeln mit Hilfe des Stokesschen Satzes, müssen wir einen skalaren Ausdruck bilden, da auf beiden Seiten der Stokesschen Formel ein Skalar steht $\int \mathfrak{H}_s\,ds = \int \mathrm{rot}_n\mathfrak{H}\,df$. Dazu multiplizieren wir, ebenso wie bei der Ableitung der Maxwellschen Gleichungen, $\mathfrak{A}$ skalar mit dem konst. Vektor $\mathfrak{v}$.

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}} = \tau\int \mathfrak{v}\left[\mathrm{grad}\,\tfrac{1}{r}, \mathfrak{n}\right]df = \tau\int \mathfrak{n}\left[\mathfrak{v}, \mathrm{grad}\,\tfrac{1}{r}\right]df$$

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}} = \tau\int\left[\mathfrak{v}, \mathrm{grad}\,\tfrac{1}{r}\right]_n df$$

$$\left[\mathfrak{v}, \mathrm{grad}\,\tfrac{1}{r}\right]_x = \mathfrak{v}_y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \mathfrak{v}_z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} = \frac{\partial\frac{\mathfrak{v}_y}{r}}{\partial z} - \frac{\partial\frac{\mathfrak{v}_z}{r}}{\partial y} = -\mathrm{rot}_x\frac{\mathfrak{v}}{r}$$

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{v}} = -\tau\int \mathrm{rot}_n\frac{\mathfrak{v}}{r}\,df = \tau\int\frac{\mathfrak{v}}{r}\,d\mathfrak{s},\quad \mathfrak{A} = \tau\int\frac{d\mathfrak{s}}{r} \qquad = +\tau\int \mathrm{rot}_{n_1}\frac{\mathfrak{v}}{r}\,df$$

$\tau = \frac{J}{c}$, $\mathfrak{A} = \frac{J}{c}\int\frac{d\mathfrak{s}}{r}$ wie oben bis auf den Faktor μ, weil hier angenommen, daß $\mathfrak{H}$ nur von Strömen herrührt, dagegen keine magnetisierten Körper sonst da sind.

bei konst. μ

Wir haben jetzt folgende Darstellungen für das von Strömen erzeugte Magnetfeld

Biot-Savart: $\mathfrak{H} = \frac{J}{c}\int\frac{[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]}{r^3}$

$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c}\int\frac{i\,dv}{r} = \mu\frac{J}{c}\int\frac{d\mathfrak{s}}{r}$

$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\varphi$, $\varphi = \frac{J}{c}\int(\operatorname{grad}\frac{1}{r}, n)\,df$

Wir hatten ferner abgeleitet

$\int\mathfrak{H}_s\,ds = \frac{4\pi J}{c}$, $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi i}{c}$, $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$

Letztere Beziehungen setzen wir auch bei variablem μ als gültig voraus, überhaupt ganz allgemein, auch für ferromagnet. Stoffe und permanente Magnete. Wir können diese Beziehung beweisen, wenn wir voraussetzen, daß $\mathfrak{H}$ nur herrührt entweder von Strömen oder von $\mathfrak{M}$ (permanent oder induziert), also nur wahren Magnetismus ausschließen. Denn dann setzt sich das Feld $\mathfrak{H}$ in jedem Punkt zusammen aus $\mathfrak{H}_1$ von Strömen und $\mathfrak{H}_2$ von $\mathfrak{M}$.

$\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}_1 + \operatorname{rot}\mathfrak{H}_2$, $\operatorname{rot}\mathfrak{H}_1 = \frac{4\pi i}{c}$

$\operatorname{rot}\mathfrak{H}_2 = -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$, $\varphi = -\int(\mathfrak{M}\operatorname{grad}\frac{1}{r})\,dv$

also $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi i}{c}$

$\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + 4\pi\mathfrak{M}$

$\operatorname{div}\mathfrak{H}_1 = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{A} = 0$

$\operatorname{div}\mathfrak{H}_2$

26. Stunde

Ortsbild Variable u

Allgemein wird $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ sein, wobei $\mathfrak{H}_1$ von Strömen, $\mathfrak{H}_2$ von $\mathfrak{M}$ herrührt. Die $\mathfrak{H}_1$ können wir zur Darstellung von $\mathfrak{H}$ im Vakuum ansehen.

$\mathfrak{H}_1 = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int \frac{i\,dv}{r}$ $\qquad \mathfrak{M} = f(\mathfrak{H})$ resp. permanente Magnete

$\mathfrak{H}_2 = -\mathrm{grad}\,\varphi,\ \varphi = +\int(\mathfrak{M}, \mathrm{grad}_q \tfrac{1}{r})\,dv$

Grenzflächen räumlich stetig $\varphi = -\int \frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{M}\,dv}{r}$

$-\mathrm{div}\,\mathfrak{M} = \varrho_m,\ \mathrm{div}\,\mathfrak{H}_2 = 4\pi\varrho_m = -\mathrm{div}\,4\pi\mathfrak{M}$

$\mathrm{div}\,\mathfrak{H}_1 = 0,\ \mathrm{div}(\mathfrak{H}_2 + 4\pi\mathfrak{M}) = 0,\ \mathrm{div}\,\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M} = \mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0$

$\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0,\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,i$ wegen $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}_2 = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = 0$

Einheitliche Darstellung:

1) mit skalarem Potential

Wir legen durch die geschlossenen Strombahnen, die wir als Linienströme voraussetzen, durchgehende Flächen. Dann ist auch $\mathfrak{H}_1 = -\mathrm{grad}\,\varphi$ darstellbar,

denn statt $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} = \frac{J}{c}\int\frac{ds}{r}$ können wir dann setzen $\mathfrak{A} = \frac{J}{c}\int[\mathrm{grad}\tfrac{1}{r}, n]\,df$

und statt dessen $\mathfrak{H}_1 = -\mathrm{grad}\,\varphi,\ \varphi = \frac{J}{c}\int(n, \mathrm{grad}_q \tfrac{1}{r})\,df$

Wir haben also $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = -\mathrm{grad}\,\varphi$

$$\varphi = \frac{J}{c}\int\left(n, \mathrm{grad}_q\frac{1}{r}\right)df + \int\left(\mathfrak{M}, \mathrm{grad}_q\frac{1}{r}\right)dv$$

2) mit Vektorpotential: (2 Vorteile: 1) brauchen stromdurchflossene Gebiete nicht auszuschließen 2) gilt Stromverteilung)

$\mathfrak{H}_1 = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int\frac{i\,dv}{r}$

$\mathfrak{H}_2 = -\mathrm{grad}\,\varphi,\ \varphi = \int(\mathfrak{M}\ \mathrm{grad}_q\tfrac{1}{r})\,dv$ statt dessen

$\mathfrak{H}_2 = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} = \int[\mathfrak{M}\ \mathrm{grad}_q\tfrac{1}{r}]\,dv$

Also $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A},\ \mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int\frac{i\,dv}{r} + \int[\mathfrak{M}, \nabla_q\tfrac{1}{r}]\,dv$

$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,i,\ \mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0$ allgemeinste Darstellung

Jedes einzelne Volumelement mit dv wirkt wie ein Dipol mit Moment $\mathfrak{M}\,dv$. Statt dessen können wir uns an die Stelle von df ein Flächenelement df mit Normale n denken, das homogene Doppelschicht vom Moment $\tau\, n\, df = \mathfrak{M}\,dv$ trägt. Und statt dieser wieder einen ∞ kleinen linearen geschlossenen Stromkreis, der df berandet und vom Strom J durchflossen wird, wobei J so gewählt ist, daß $\frac{J}{c} = \tau = \frac{\mathfrak{M}\,dv}{n\,df} = |\mathfrak{M}|\,dl$ ist.

Wahrer Strom: Es ist $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} i$

$\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{M}$

$$\operatorname{rot}\mathfrak{B} = \frac{4\pi i'}{c} = \operatorname{rot}\mathfrak{H} + 4\pi\operatorname{rot}\mathfrak{M}$$

$$\frac{4\pi i'}{c} = \frac{4\pi i}{c} + 4\pi\operatorname{rot}\mathfrak{M}, \quad \frac{i'}{c} = \frac{i}{c} + \operatorname{rot}\mathfrak{M}$$

Nun läßt sich $\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int\frac{i\,dv}{r} + \int\left[\mathfrak{M}, \nabla_q \frac{1}{r}\right] dv$

umformen in $\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int\frac{i\,dv}{r} + \int\frac{\operatorname{rot}\mathfrak{M}\,dv}{r}$ (x)

sodaß $\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int\frac{i'\,dv}{r}$ wird.

Setzen wir $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$, so wird

$$\frac{4\pi i'}{c} = \operatorname{rot}\mu\mathfrak{H} = \mu\frac{4\pi i}{c} + [\operatorname{grad}\mu, \mathfrak{H}]$$

denn es ist $\operatorname{rot}_x \mu\mathfrak{H} = \mu\operatorname{rot}_x\mathfrak{H} + \mathfrak{H}_z\frac{\partial\mu}{\partial y} - \mathfrak{H}_y\frac{\partial\mu}{\partial z}$

also $i' = \mu i + \frac{c}{4\pi}[\operatorname{grad}\mu, \mathfrak{H}]$

$i' \neq 0$ wo wahrer Strom und wo μ variiert

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c}\int\frac{i'\,dv}{r} = \frac{1}{c}\int\frac{\mu i\,dv}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\frac{dv}{r}[\nabla\mu, \mathfrak{H}]$$

geht für μ = konst in $\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c}\int\frac{i\,dv}{r}$ über.

Äquivalenz d. kleinen Kreisströme entsprechender Doppelschicht wirklich nachweisen

Solenoid, Eisenkern

(x) $\int\left[\mathfrak{M}, \nabla_q\frac{1}{r}\right] dv = \int\frac{\operatorname{rot}\mathfrak{M}}{r} dv - \int\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{M}}{r} dv$

wegen $\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{M}}{r} = \frac{1}{r}\operatorname{rot}\mathfrak{M} - \left[\mathfrak{M}, \nabla\frac{1}{r}\right]$

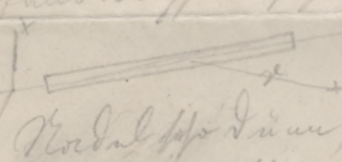
$\int\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{M}}{r} dv = \int\frac{\mathfrak{M}_n}{r} df = 0$ für ∞ ferne Fläche

also $\int\left[\mathfrak{M}, \nabla_q\frac{1}{r}\right] dv = \int\frac{\operatorname{rot}\mathfrak{M}}{r} dv$

22. Stunde

Magnetismus: Magnetostatik analog zu Elektrostatik. Benutzt man sehr lange dünne Magnete, so kann man für die Wirkung der Magnetpole aufeinander das Coulombsche Gesetz verifizieren. Feldstärke wie bei $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{H} = \lim_{m=0} \frac{\mathfrak{K}}{m}$. Der Dielektrizitätskonstante ε entspricht die Permeabilität μ, deutsch $\mathfrak{B}$. $\mathfrak{D}=\varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}=\mu\mathfrak{H}$. Wesentliche Unterschiede: Es gibt keinen wahren Magnetismus $\operatorname{div}\mathfrak{B}=0$ und keine magnetischen Leiter. μ kann auch <1 sein, diamagn. paramagn. Ferromagn. μ keine Konstante. permanenter Magnetismus, Ferromagnetismus. Hysteresis. Beziehung $\mathfrak{B}=\mu\mathfrak{H}$ bei Ferromagn. nicht brauchbar.

Die Tatsache, dass es nicht möglich ist, pos. oder neg. Magnet. zu isolieren, zeigt, dass es keinen wahren Magnetismus gibt. Also permanente Magnete. Permanente Magnet. Vektor $\mathfrak{M}$ analog $\mathfrak{P}$. Ein ~~...~~ Polarisation. magnetischer Körper hat Potential $\varphi = \int(\mathfrak{M}\operatorname{grad}_q \frac{1}{r})\,dv$ homogen $\varphi = \mathfrak{M}\int \operatorname{grad}_q \frac{1}{r}\,dv = -|\mathfrak{M}|\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\,dv$ falls z Achse Richtg von $\mathfrak{M}$. Lange, dünne gerade Nadel.



$\parallel z, \mathfrak{M}$, $\varphi = -|\mathfrak{M}|\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta$

Nadel sehr dünn, $r \gg$ als Querschnittsdimensionen q, dann ist r also auch $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}$ nur von ζ abhängig und wird

$\varphi = |\mathfrak{M}|q\int \frac{d\frac{1}{r}}{d\zeta}\,d\zeta = |\mathfrak{M}|q\,\frac{1}{r}\Big|_1^2 = M\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$, wobei $M = |\mathfrak{M}|q$ das magnet. Moment der Längeneinheit ist. $\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\varphi$. Der Magnet wirkt also so, als ob an seinen beiden Enden $+$ und $-$ Magnetismus M säße.

Allgemein ist also im magnetostatischen Felde überall dann $\mathfrak{H}$ bestimmt, wenn wir $\mathfrak{M}$ überall kennen. Haben wir z. B. permanente Magnete und betrachten wir bei Ausschluss von Elektromagn. $\mathfrak{M}_p$, so können wir bei ... $\mathfrak{H}$ angeben, wenn wir für alle Körper $\mathfrak{M} = f(\mathfrak{H})$ kennen.

$\varphi = \int(\mathfrak{M}\operatorname{grad}_q \frac{1}{r})\,dv$, $\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\varphi$. Umformung wie bei Dielektrikum $\varphi = \int(\mathfrak{M}\operatorname{grad}_q \frac{1}{r})\,dv = \int \frac{\mathfrak{M}_n\,df}{r} - \int \frac{\operatorname{div}\mathfrak{M}}{r}\,dv$

$\varphi = \int \frac{\omega'_m\,df}{r} + \int \frac{\varrho'_m\,dv}{r}$, $\omega'_m = \mathfrak{M}_n$, $\varrho'_m = -\operatorname{div}\mathfrak{M}$

$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\varphi$, $4\pi\varrho'_m = \operatorname{div}\mathfrak{H}$, $4\pi\omega'_m = \mathfrak{H}_{n_1} - \mathfrak{H}_{n_2}$

$4\pi\varrho'_m + \operatorname{div}4\pi\mathfrak{M} = \operatorname{div}(\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{M}) = \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$

$\mathrm{div}\,\mathfrak{B}=0,\ \mathrm{div}\,\mathfrak{D}=0$
$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}=0,\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{E}=0$

Es ist also genau der elektrostatische Fall, nur daß es keine wahre Ladung, sondern nur natürliche permanente Polarisation gibt und $\mathfrak{B}=\mu\mathfrak{H}$ nicht so weit gilt. Bei para- und diamagnet. Körpern ist $\mathfrak{M}=\kappa\mathfrak{H}$ also $\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{M}=(1+4\pi\kappa)\mathfrak{H}=\mu\mathfrak{H},\ \mu=1+4\pi\kappa$ Kugel homogen magnetisiert.

$\boxed{\text{23 Stunde}}$

Zusammenhang zwischen elektr. u. magnet. Erscheinungen lange gesucht. Oersted 1820 Ablenkung, kurz darauf Biot und Savart quantitativ. Geschlossener Strom, linearer Leiter, μ konstant überall $\mathfrak{H}=\frac{J}{c}\int\frac{[d\mathfrak{s},\mathfrak{r}]}{r^3}$, $|\mathfrak{H}|=\frac{J}{c}\int\frac{\sin(d\mathfrak{s},\mathfrak{r})}{r^2}ds$

$= -\frac{J}{c}\int\left[d\mathfrak{s},\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\right]$

denn es ist $\mathrm{grad}_x\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x-\xi}{r^3}$ also $\mathrm{grad}\,\frac{1}{r}=-\frac{\mathfrak{r}}{r^3}$

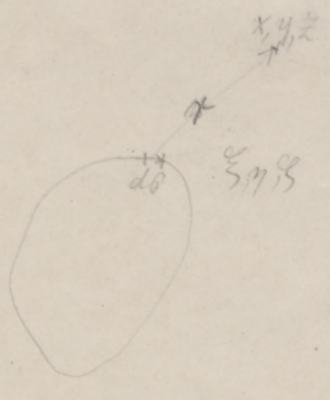
$\int\mathfrak{H}_s\,ds\neq 0$, falls Strombahn umschlossen wird.

z. B. geradliniger Leiter, ∞ lang, $\sin(d\mathfrak{s},\mathfrak{r})=\frac{r_0}{r}$

$|\mathfrak{H}|=\frac{J}{c}\int\frac{\sin(d\mathfrak{s},\mathfrak{r})}{r^2}ds=\frac{J}{c}\int\frac{\cos\varphi\,ds}{r^2}$, $r^2 d\varphi = r_0\,ds$

$|\mathfrak{H}|=\frac{J}{c}\frac{1}{r_0}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=\frac{J}{c}\frac{1}{r_0}\left|\sin\varphi\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2J}{c\,r_0}$

$\int\mathfrak{H}_s\,ds=\frac{2J}{c\,r_0}2\pi r_0=\frac{4\pi J}{c}\neq 0$



Also $\mathfrak{H}$ nicht von Potential ableitbar, wenigstens nicht eindeutig. Dagegen von Vektorpotential $\mathfrak{A}$

$\mathfrak{A}=\frac{J\mu}{c}\int\frac{d\mathfrak{s}}{r}$, $\mathfrak{H}=\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$, oder $\mu\mathfrak{H}=\mathfrak{B}=\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$.

Komponent. $\mathfrak{A}_x=\frac{J\mu}{c}\int\frac{d\xi}{r},\ \mathfrak{A}_y=\frac{J\mu}{c}\int\frac{d\eta}{r},\ \mathfrak{A}_z=\frac{J\mu}{c}\int\frac{d\zeta}{r}$

$\mathrm{rot}_z\mathfrak{A}=\frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial y}=\frac{J\mu}{c}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\eta-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\xi\right)$

$=\frac{J\mu}{c}\int\left[\mathrm{grad}\frac{1}{r},d\mathfrak{s}\right]_z=-\frac{J\mu}{c}\int\left[d\mathfrak{s},\mathrm{grad}\frac{1}{r}\right]_z$

$\mathfrak{H}=\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}=-\frac{J}{c}\int\left[d\mathfrak{s},\mathrm{grad}\frac{1}{r}\right]=\frac{J}{c}\int\frac{[d\mathfrak{s},\mathfrak{r}]}{r^3}$

$\mathrm{div}\,\mathfrak{H}=0\quad\mathrm{div}\,\mathfrak{B}=0$

$\mathfrak{H}_x=\frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial y}-\frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial z},\ \mathfrak{H}_y=\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{A}_z}{\partial x},\ \mathfrak{H}_z=\frac{\partial\mathfrak{A}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{A}_x}{\partial y}$

$\mathrm{div}\,\mathfrak{H}=\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\mathfrak{A}_z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\mathfrak{A}_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\mathfrak{A}_x}{\partial y\partial z}=0$

Wie groß $\mathrm{div}\,\mathfrak{A}$? $=\frac{J\mu}{c}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}d\xi+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}d\eta+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}d\zeta\right)$

$=\frac{J\mu}{c}\int\left(\mathrm{grad}\frac{1}{r},d\mathfrak{s}\right)=-\frac{J\mu}{c}\int\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}d\eta+\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}d\zeta\right)$

$=-\frac{J\mu}{c}\int d\frac{1}{r}=0$ für geschlossenen Stromkreis

Wir wollen jetzt auf ausgedehnte Leiter verallgemeinern

dann wird aus $J\,ds$: $i\,dv$, also $\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\int\frac{[i\,dv, \mathfrak{r}]}{r^3}$

und $\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c}\int\frac{i\,dv}{r}$.

Haben gesehen $\int \mathfrak{H}_s\,ds \neq 0$, berechnen! Nach Stokes

$\int \mathfrak{H}_s\,ds = \int \mathrm{rot}_n \mathfrak{H}\,df$. Müssen also $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}$ berechnen

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$$

$$\mathrm{rot}_x \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z},\quad \mathrm{rot}_y \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x},\quad \mathrm{rot}_z \mathfrak{A} =$$

$$\mu\,\mathrm{rot}_z \mathfrak{H} = \frac{\partial\,\mathrm{rot}_y \mathfrak{A}}{\partial x} - \frac{\partial\,\mathrm{rot}_x \mathfrak{A}}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_x}{\partial x\,\partial z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_y}{\partial y\,\partial z} \Big| - \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_z}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\right) - \Delta \mathfrak{A}_z$$

$\mu\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A} - \Delta\mathfrak{A} = -\Delta\mathfrak{A}$ wegen $\mathrm{div}\,\mathfrak{A} = 0$

$\mathfrak{A}_x = \frac{\mu}{c}\int\frac{i_x\,dv}{r}$ ebenso wie aus $\varphi = \int\frac{\varrho\,dv}{r}$ folgt

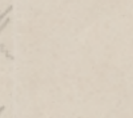
$\Delta\varphi = -4\pi\varrho$, folgt hieraus $\Delta\mathfrak{A}_x = -\mu\frac{4\pi i_x}{c}$ also $\Delta\mathfrak{A} = -\mu\frac{4\pi i}{c}$

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = -\frac{1}{\mu}\Delta\mathfrak{A} = \frac{4\pi i}{c}$$

$$\int\mathfrak{H}_s\,ds = \int\mathrm{rot}_n\mathfrak{H}\,df = \frac{4\pi}{c}\int\frac{i_n\,df}{c} = \frac{4\pi J}{c}$$

$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\,i$ allgemeingültig

$\mathfrak{H}$ nicht $\mathrm{grad}\,\varphi$. Wenn wir aber durch linearen geschlossenen Leiter als Begrenzung eine Fläche legen und festsetzen, daß nicht durchschreitbar, so ist $\int\mathfrak{H}_s\,ds = 0$ und $\mathfrak{H} = -\mathrm{grad}\,\varphi$. Wie muß dann φ aussehen? Es muß beim [illegible] ~~durchschreiten~~ der Fläche $\int_1^2\mathfrak{H}_s\,ds = \frac{4\pi J}{c}$ sein, d. h. es muß Doppelschicht mit $\varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\tau = \frac{4\pi J}{c}$, also Moment $\mu\tau$ pro Flächeneinheit. Hängt nur von Randkurve ab. Um nachzuweisen, daß eine ~~Doppelschicht~~ Doppelschicht vom Moment $\tau = \frac{J}{c}$ pro cm^2 tatsächlich das Biot-Savartsche Gesetz gibt, wollen wir zunächst, was wir auch für später brauchen, allgemein zeigen, daß man die von magnetischen Körpern herrührende $\mathfrak{H}$ statt als $\mathrm{grad}\,\varphi$ auch als $\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$ darstellen kann.



$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}\varphi\,,\quad \varphi = -\int\left(\mathfrak{M}\operatorname{grad}\tfrac{1}{r}\right)dv$$

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int\left(\mathfrak{M}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \ldots\right)dv$$

$$= \int\left(\mathfrak{M}_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + \right.$$

$$\mathfrak{H}_x = \operatorname{rot}_x\int\left[\operatorname{grad}\tfrac{1}{r}, \mathfrak{M}\right]dv\,,\quad \mathfrak{A} = \int\left[\operatorname{grad}\tfrac{1}{r}, \mathfrak{M}\right]dv$$

linearem Leiter

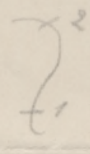
$$\mathfrak{M}\,dv = \tau\,\mathfrak{n}\,df\,,\quad \mathfrak{A} = \tau\int\left[\operatorname{grad}\tfrac{1}{r}, \mathfrak{n}\right]df\,.$$

20. Stunde

Hatten gesagt, dass im stationären Zustand $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, dabei ist unter $\mathfrak{E} = \lim_{e=0} \frac{\mathfrak{K}}{e}$ die vom elektrostatischen herrührende Feld, Kraft auf Einheitsladung zu verstehen. Nun können auf Ladungen aber auch andere Kräfte wirken, z. B. Ionen werden chemisch getrieben. Diese nicht elektrischen Kräfte nennt man eingeprägte Kräfte. Das ist dasselbe, wie man in der Mechanik von äußeren Kräften spricht.

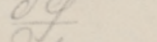
Man versteht nun unter $\mathfrak{E}$ die gesamte auf die Einheitsladung wirkende Kraft: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^s + \mathfrak{E}^e$. Durch diesen Ansatz macht man die Voraussetzung, dass $\mathfrak{K}^e$ gegeben ist. Von einem Potential ableitbar ist im allgemeinen nur $\mathfrak{E}^s$. Dagegen gilt $i = \sigma\mathfrak{E}$ und $Q_0 = i\mathfrak{E} = \sigma\mathfrak{E}^2$.

$i = \sigma(\mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^s)$, $\mathfrak{E}^s = -\mathfrak{E}^e + \frac{1}{\sigma} i = -\operatorname{grad}\varphi$

Linearer Leiter, Leitlinie s, $\mathfrak{E}^s = -\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ 

$i = \frac{J}{q}$, also $\int_1^2 \mathfrak{E}^s ds = \varphi_1 - \varphi_2 = J\int_1^2 \frac{ds}{\sigma q} - \int_1^2 \mathfrak{E}^e ds$

$\varphi_1-\varphi_2 = JR - E^e$. Man bezeichnet E^e als elektromotorische Kraft, trotzdem es die Dimension von Kraft × Weg = Arbeit hat. Bildet man $\int_1^2$ über geschlossenen Stromkreis, so wird $\varphi_1-\varphi_2=0$ und $E^e = JR$.

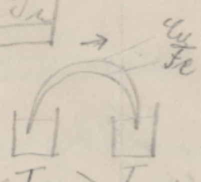
Wann tritt nun in einem geschlossenen Leiterkreis ein $E^e \neq 0$ auf. Nur dann, wenn $J\neq 0$. Dagegen kann in einem ungeschlossenen Leiterkreis $E^e \neq 0$ sein auch im elektrostatischen Fall $J = 0$. Nun ist im Innern eines homogenen Leiters stets $\mathfrak{E}^e = 0$. Nur an der Grenzfläche $\mathfrak{E}^e\neq 0$. 

Bilden wir $\int_1^2 \mathfrak{E}^e ds = E^e$, so kann dies einen endlichen Wert behalten, falls wir mit der Dicke der Grenzschicht zu Null übergehen. Dann wird $R=0$ und aus $\varphi_1-\varphi_2 = JR-E^e$ folgt $-E^e = \varphi_1-\varphi_2$, d. h. die eingeprägte EMK erzeugt einen Potentialsprung an der Grenze. Nun hatten

wir früher gesehen, daß eine elektrische Doppelschicht einen Potentialsprung erzeugt. Wir können uns die Vorgänge also so vorstellen, daß die eingeprägten Kräfte eine Doppelschicht erzeugen, und die mol. th. Durcharbeitung dieses Problems zeigt, daß diese Vorstellung tatsächlich berechtigt ist. (Kontaktspannung, $\overline{Zn \mid Cu}$, Elektrodenkraft)
Wir haben gesehen, daß für Leiter erster Klasse das Gesetz der Voltaschen Spannungsreihe gilt, d. h.
$E_{12} + E_{23} + \cdots E_{n1} = E^e = 0$. In einem geschlossenen Kreise fließt kein Strom, da $E^e = J R$. Nur falls Leiter zweiter Klasse auftreten, ist $E^e \neq 0$ und dann kann auch $J \neq 0$ sein, nämlich $J R = E^e$.
Joulesche Wärme $Q = J^2 R = J E^e$. Es wird also ständig Wärme entwickelt, auf Kosten chemischer Energie.
Es gibt jedoch Fälle, in denen man den Sitz der EMK nicht an Grenzflächen lokalisieren kann, sondern räumliche Verteilung annehmen muß, und ebenso braucht die Energiequelle nicht gerade chemischer Natur zu sein (Diffusionselemente, Thermokraft, Peltiereffekt, Thomsonströme, Pyro- und Piezoelektr.)
Pyro: erwärmt man Turmalinkristall, so wird das eine Ende pos. das andere neg., umgekehrt bei Abkühlung.
Piezo: drückt man Quarz, ebenso, umgekehrt bei Zug.
Da Isolatoren, fließt kein Strom: $-E^e = \varphi_1 - \varphi_2$

$\boxed{\text{21. Stunde}}$

Thermoelektrizität:



Woher Energie? Warme Lötstelle kühlt sich ab, kalte erwärmt sich. Bei Stromdurchgang in entgegengesetzter Richtung umgekehrt, Peltiereffekt. $Q_1 - Q_2 = A$.

$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$, ~~$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_2}$~~, $E^e \sim A = Q_1 - Q_2 = T_1 \frac{Q_2}{T_2} - Q_2 = (T_1 - T_2)\frac{Q_2}{T_2}$

d.h. bei konst. T_2, also auch Q_2, müsste $E^e \sim T_1 - T_2$ sein. Nicht der Fall. Außerdem Thomsoneffekt, Peltiereffekt an homogenem ungleich temperiertem Metall. Fließt Strom durch Draht mit Temperaturgefälle, so wird Wärme entwickelt oder absorbiert in umkehrbarer Weise, denn bei entgegengesetzter Stromrichtung wird Vorzeichen der Wärmeentwicklung umgekehrt. Aber die der Thomsonkraft entsprechende EMK bei Kontakt von ungleich temperierten Leiterstücken des gleichen Metalls ist bisher noch nicht einwandfrei nachzuweisen (Baedeker).

Verschiebungsstrom

Im geschlossenen stationären Stromkreis ist die Stromstärke für alle Querschnitte gleich. Sonst würde sich Elektrizität anhäufen oder verschwinden und $\mathfrak{E}$ sich ändern. Es ist also $\int i_n\,df$ über geschlossene Fläche $= 0$. Nach Gauß $\operatorname{div} i = 0$, $i_{n_1} + i_{n_2} = 0$, $i_n = 0$ an Grenzfläche von 2 Leitern resp. Leiter u. Isolator. Bei nicht stationären Strömen wird $-\int i_n\,df = \frac{de}{dt}$, der Zunahme der Elektrizitätsmenge in dem rings umschlossenen Raume. Nun ist $e = \int \varrho\,dv$ – weil n die nach außen gerichtete Normale ist

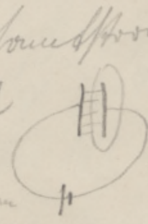
und $-\int i_n\,df = -\int \operatorname{div} i\,dv = \int \frac{\partial \varrho}{\partial t}\,dv$, $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div} i = 0$.

Kontinuitätsgleichung d. Hydrodynamik: $-\int \varrho w_n\,df = -\int \operatorname{div}(\varrho w)\,dv = \frac{d}{dt}\int \varrho\,dv$, $\operatorname{div}(\varrho w) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$. $i = \varrho w$ anschaulich.

Umformung: $4\pi\varrho = \operatorname{div}\mathfrak{d}$, $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{div}\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t}$

$\operatorname{div}\left(i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t}\right) = 0 = \operatorname{div}\mathfrak{i}$. Gesamtstrom

$\mathfrak{i} = i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{d}}{\partial t}$ quellenfrei. Beispiel ([illegible])



$J = \frac{de}{dt}$, Verschiebungslinien zwischen den Platten

$\int \mathfrak{d}_n\,df = 4\pi e$, $J = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial \mathfrak{d}_n}{\partial t}\,df$. $J = -\int i_n\,df$

$\int \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{d}_n}{\partial t} + i_n\right) df = 0$, $\operatorname{div}\mathfrak{i} = 0$

Einführung [illegible] von formal Maschinentechn.

Maxwell's grundlegende physikalische Hypothese ist, daß Verschiebungsstrom die gleichen magnet. Wirkungen ausübt wie Leitungsstrom. Nach Maxwell für Körper σ und ε. $\mathfrak{c} = i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \sigma\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$

Bei raschen Schwingungen wird Verschiebungsstrom merklich.

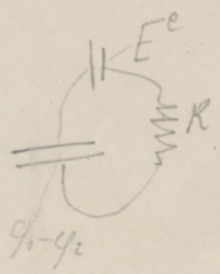
Konvektionsstrom $\rho\mathfrak{v}$.

$$\mathfrak{c} = i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \rho\mathfrak{v}$$

Nicht immer eindeutig Form

Elektronentheorie, Verschiebungsstrom teilweise Konvektionsstrom $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}$.

Verschiebungsstrom $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t}$



$$\varphi_1-\varphi_2 = JR - E^e, \quad \varphi_1-\varphi_2 = \frac{-e}{K}, \quad J = \frac{de}{dt}$$

$$e + KR\frac{de}{dt} + KE^e = 0, \quad J + KR\dot{J} = 0$$

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{-J}{KR}, \quad \frac{d\ln J}{dt} = \frac{-1}{KR}, \quad J = J_0 e^{-\frac{t}{KR}}$$

$\boxed{\text{18. Stunde}}$

Ponderomotorische Kräfte.

Auf Volumelement dv mit Dichte ϱ wirkt laut Definition die Kraft $\mathfrak{E}\varrho\, dv$. Muß allgemein gelten wegen $\mathfrak{E} = \lim\limits_{e=0} \frac{\mathfrak{K}}{e}$ und $\varrho = \lim\limits_{dv=0} \frac{e}{dv}$. Müssen, falls Isolator polarisierbar, wirklich genügend kleine dv. Auf Dipol Kraft, falls $\mathfrak{E}$ veränderlich. Ausrechnung ergibt, ~~falls ε~~ Zusatzkraft $-\frac{1}{8\pi}\mathfrak{E}^2 \operatorname{grad} \varepsilon$. Im folgenden homogenes Dielektrikum.

$$\mathfrak{K} = \int \mathfrak{E}\varrho\, dv,\quad 4\pi\varrho = \operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{E},\quad \mathfrak{K} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int \mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dv$$

Umformen in Oberflächenintegral mit [illegible] Vgl. $\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E}$ in div-Ausdruck. div. Vektor machen $\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E}$ zum Skalar durch Multiplikation mit konstantem Vektor $\mathfrak{v}$. $\mathfrak{K}_{\mathfrak{v}} = \frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{v}\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dv$ Arbeit bei Verschiebung des Körpers um $\mathfrak{v}$. Aufgabe $\mathfrak{v}\mathfrak{E} \operatorname{div} \mathfrak{E}$ in div umwandeln.

$$\operatorname{div}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})\mathfrak{E} = (\mathfrak{v}\mathfrak{E}) \operatorname{div} \mathfrak{E} + \mathfrak{E} \operatorname{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})$$

$\mathfrak{E} \operatorname{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})$ skalares Produkt in div umwandeln

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\mathfrak{E} + (\mathfrak{E} \operatorname{grad})\mathfrak{v} + [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{E}] + \underline{[\mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{v}]}$$

$\mathfrak{v}$ konstant also $\operatorname{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\mathfrak{E}$ wegen $\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0$

$$\mathfrak{E} \operatorname{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = \mathfrak{E}\cdot(\mathfrak{v} \operatorname{grad})\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_x(\mathfrak{v} \operatorname{grad} \mathfrak{E}_x) + \cdots$$

$$\mathfrak{E}_x(\mathfrak{v} \operatorname{grad} \mathfrak{E}_x) = \mathfrak{E}_x\left(\mathfrak{v}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \mathfrak{v}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathfrak{v}_x \frac{\partial \mathfrak{E}_x^2}{\partial x} + \mathfrak{v}_y \frac{\partial \mathfrak{E}_x^2}{\partial y} + \mathfrak{v}_z \frac{\partial \mathfrak{E}_x^2}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}(\mathfrak{v} \operatorname{grad} \mathfrak{E}_x^2)$$

$\mathfrak{E} \operatorname{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{v} \operatorname{grad} \mathfrak{E}^2) = \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathfrak{v}\mathfrak{E}^2$ wegen $\mathfrak{v}$ konst.

$$(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) \operatorname{div} \mathfrak{E} = \operatorname{div}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})\mathfrak{E} + \mathfrak{E} \operatorname{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})$$

$$= \operatorname{div}\left[(\mathfrak{v}\mathfrak{E})\mathfrak{E} - \frac{1}{2}\mathfrak{v}\mathfrak{E}^2\right]$$

$$\mathfrak{K}_{\mathfrak{v}} = \frac{1}{4\pi}\int(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dv = \frac{1}{4\pi}\int\left[(\mathfrak{v}\mathfrak{E})\mathfrak{E} - \frac{1}{2}\mathfrak{v}\mathfrak{E}^2\right]_n df$$

$$= \frac{1}{8\pi}\int\left[2(\mathfrak{v}\mathfrak{E})(\mathfrak{E}\mathfrak{n}) - (\mathfrak{v}\mathfrak{n})\mathfrak{E}^2\right] df$$

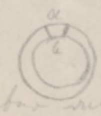
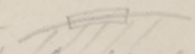
$$\mathfrak{K} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int\left[2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\mathfrak{E}^2\right] df = \int \mathfrak{T}\, df$$

$\mathfrak{T} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\mathfrak{E}^2\right]$ Kraft pro Flächeneinheit auf Flächenelement mit äußerer Normale $\mathfrak{n}$.

oder entgegengesetzte Richtung gleich, ob $\mathfrak{E}$ dieselbe oder entgeg. R., weil im zweiten Falle $(\mathfrak{E}u) = -|\mathfrak{E}|$ aber auch $\mathfrak{E} = -u|\mathfrak{E}|$.

$\mathfrak{T} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}u) - u\mathfrak{E}^2\right]$. Ist $\mathfrak{E} \perp df$, d.h. haben u und $\mathfrak{E}$ die gleiche Richtung, so wird $(\mathfrak{E}u) = |\mathfrak{E}|$ und $\mathfrak{E}(\mathfrak{E}u) = \mathfrak{E}|\mathfrak{E}| = u\mathfrak{E}^2$, also $\mathfrak{T} = u\frac{\mathfrak{E}^2\varepsilon}{8\pi}$ d.h. Zug vom Betrage der Energiedichte.

Ist $\mathfrak{E} \perp u$, so ist $(\mathfrak{E}u) = 0$, $\mathfrak{T} = -u\frac{\mathfrak{E}^2\varepsilon}{8\pi}$ Druck vom Betrage.

Auf einen Zylinder mit Wandung $\parallel \mathfrak{E}$, Grundflächen $\perp \mathfrak{E}$ wirkt Druck auf Wand, Zug auf beide Endflächen. Gesamtkraft Null, falls Feld homogen. Trotzdem Kompression,  weil die Spannungen an a und b gleich, Kraft aber auf a größer wegen größerer Fläche. Ebenfalls Kraft auf Leiteroberfläche  $\mathfrak{E}$ normal, innen Null, also wirkliche Kraft gleich Maxwellspannung $u\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}{8\pi}$, d.h. Zug $\frac{1}{2}\mathfrak{E}\omega$, da $4\pi\omega = \mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}$.

Kraft hängt ab von Stellung von df gegen u.

$$\mathfrak{T}_x = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\mathfrak{E}_x(\mathfrak{E}u) - u_x\mathfrak{E}^2\right]$$

$$\mathfrak{T}_x = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[(2\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}^2)u_x + 2\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y u_y + 2\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z u_z\right]$$

$$\mathfrak{T}_y = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y u_x + (2\mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}^2)u_y + 2\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z u_z\right]$$

$$\mathfrak{T}_z = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z u_x + 2\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z u_y + (2\mathfrak{E}_z^2 - \mathfrak{E}^2)u_z\right]$$

Lineare Vektorfunktion, Tensor.

$$\mathfrak{T}_x = T_{xx}u_x + T_{xy}u_y + T_{xz}u_z$$

$$\mathfrak{T}_y = T_{yx}u_x + T_{yy}u_y + T_{yz}u_z$$

$$\mathfrak{T}_z = T_{zx}u_x + T_{zy}u_y + T_{zz}u_z$$

$$T_{xx} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(2\mathfrak{E}_x^2 - \mathfrak{E}^2),\ T_{yy} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(2\mathfrak{E}_y^2 - \mathfrak{E}^2),\ T_{zz} = \frac{\varepsilon}{8\pi}(2\mathfrak{E}_z^2 - \mathfrak{E}^2)$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_y,\ T_{xz} = T_{zx} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_z,\ T_{yz} = T_{zy} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E}_y\mathfrak{E}_z$$

19. Stunde

$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0,\ \int_0 \mathfrak{E}_s\,ds = 0 = \int \mathrm{rot}_n \mathfrak{E}\,df,\ \mathfrak{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$

$\int \mathfrak{D}_n\,df = 4\pi \sum e = \int \mathrm{div}\,\mathfrak{D}\,dv = 4\pi \int \varrho\,dv,\ \mathrm{div}\,\mathfrak{D} = 4\pi\varrho$

$\mathfrak{D}_{n_1} - \mathfrak{D}_{n_2} = 4\pi\omega,\ \mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$

$\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 4\pi\varrho',\ \mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2} = 4\pi\omega',\ \varphi = \int \frac{\omega'\,df}{r} + \int \frac{\varrho'\,dv}{r}$

$\varphi = \varphi_0 + \int dv\left(\mathfrak{P}, \mathrm{grad}_q \frac{1}{r}\right) = \int \frac{\omega\,df}{r} + \int \frac{\varrho\,dv}{r} + \int \frac{\mathfrak{P}_n\,df}{r} - \int \frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{P}\,dv}{r}$

$\omega' = \omega + \mathfrak{P}_n,\ \varrho' = \varrho - \mathrm{div}\,\mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}$

$4\pi\varrho = \mathrm{div}\,\mathfrak{E} + 4\pi\,\mathrm{div}\,\mathfrak{P} = \mathrm{div}\,\mathfrak{D},\ \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}$

$\mathfrak{P} = \kappa\mathfrak{E},\ \varepsilon = 1 + 4\pi\kappa$

$U = \frac{1}{2}\sum e_i\varphi_i$ Punkte sind Leiter $U = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{E}\mathfrak{D}\,dv = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon\mathfrak{E}^2\,dv$

$\mathfrak{T} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}n) - n\mathfrak{E}^2\right],\ \mathfrak{E} \parallel n,\ \mathfrak{T} = n\frac{\varepsilon\mathfrak{E}^2}{8\pi}$

auf Leiter Kraft gleich Maxw. Spannung $n\frac{\mathfrak{E}\mathfrak{D}}{8\pi} = \frac{1}{2}\mathfrak{E}\omega = \frac{2\pi\omega^2}{\varepsilon}$

wegen $\mathfrak{D} = 4\pi\omega$. Auf Dielektr. durch virtuelle Verrückung

mit Energieausdruck, oft bequemer.

Kugel. $U = \frac{1}{2}\varphi e,\ \delta A = -\delta U,\ \delta r \qquad e = \mathrm{konst}$

$\delta A = 4\pi r^2 \mathfrak{K}_r\,\delta r = -\frac{\partial U}{\partial r}\delta r = -\frac{e}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\delta r = +\frac{e}{2}\mathfrak{E}_r\,\delta r$

$e = 4\pi r^2\omega,\ \mathfrak{K}_r = \frac{1}{2}\omega\mathfrak{E}$

Plattenkondensator pro qcm

$U = \frac{1}{2}\omega(\varphi_1 - \varphi_2),\ K = \frac{\omega}{\varphi_1 - \varphi_2},\ U = \frac{1}{2}K(\varphi_1 - \varphi_2)^2 \quad (\varphi_1 - \varphi_2) = \mathrm{konst}$

$K = \frac{\varepsilon}{4\pi d},\ U = \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{d},\ \mathfrak{K} = -\frac{\partial U}{\partial d} = +\frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{d^2} = \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2$

Elektrischer Strom.

Kondensator $+e \mid -e$ $J = \frac{de}{dt}$

Wärmeentwicklung und Magnetfeld

Stationäre elektrische Felder, Feldstärke ändert sich nicht mit der Zeit und ist aus Potential ableitbar unterscheidet sich vom elektrostatischen Feld nur durch Wärme u. Magnetfeld. J nicht durch elektrostat. Messungen sondern z. B. Voltameter (Faraday).

Ohmsches Gesetz. Stromkreis [illegible] El.

$\varphi_1 - \varphi_2$ prop. $J = RJ$

Konstante R Widerstand. Hängt R von Natur u. Dimension ab?

Für linearen Leiter $R = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{q}$, σ spez. Leitfähigkeit, l Länge, q Querschnitt d. Drahtes

Differentiell: Stromdichte $|i| = \frac{J}{q}$ parallel zu Draht $= i_s$. $\varphi_1 - \varphi_2 = \int \mathfrak{E}_s\, ds = \mathfrak{E}_s l = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{q} i_s q$

$\sigma \mathfrak{E}_s = i_s$ vektoriell $i = \sigma \mathfrak{E}$. [illegible] Gesetz.

Voraussetzung besagt $\mathfrak{E} \parallel$ Draht und homogen falls Draht homogen

$J = i_s q$, $\mathfrak{E}_s = \frac{1}{\sigma} i_s = \frac{J}{\sigma q}$

$\int_1^2 \mathfrak{E}_s\, ds = \varphi_1 - \varphi_2 = J \int \frac{ds}{\sigma q} = JR$

Joule: $Q = J(\varphi_1 - \varphi_2) = RJ^2 = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{R}$

$Q = \int Q_0\, dv$ linearen Leiter $Q = Q_0\, l\, q$ andererseits

$Q = J(\varphi_1 - \varphi_2) = q|i| \cdot |\mathfrak{E}|\, l$, $Q_0 = |i||\mathfrak{E}| = i\mathfrak{E}$

$Q_0 = i\mathfrak{E} = \sigma \mathfrak{E}^2 = \frac{1}{\sigma} i^2$; $Q = \int Q_0\, dv$

Joule u. Ohm

Sollen auch für beliebig rasch veränderliche Felder gelten, genau wie Energieausdruck

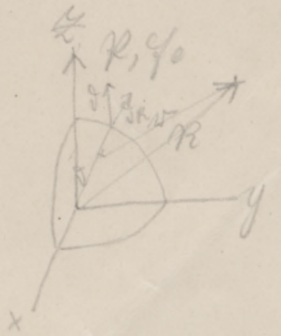
16. Stunde

Übungen:

Homogen polarisierte Kugel

Feld $\mathfrak{E}_0$ durch Einführung des Dielektrikums nicht geändert, falls Polarisationsfähigkeit so klein, daß Elektrizitätsverteilung durch Körper so klein, daß Elektrizitätsverteilung durch Rückwirkung nicht geändert. Auch dann $\mathfrak{P}$ nicht direkt berechenbar, weil $\mathfrak{P} = \kappa\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E} \neq \mathfrak{E}_0$, vielmehr $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_p$. Nur in einfachen Fällen lösbar z. B. homogene Kugel im homogenen Feld. Ansatz: auch $\mathfrak{P}$ homogen gleich $\kappa\mathfrak{E} = \kappa(\mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_p)$.

Berechnen zunächst φ_p für homogen polarisierte Kugel und zeigen, daß $\mathfrak{E}_p$ homogen. Nur dann Ansatz überhaupt möglich.



$$\varphi_p = -\int\left(\mathfrak{P}\,dv, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) = -|\mathfrak{P}|\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\,dv = -|\mathfrak{P}|\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{dv}{r}$$

$= -(\mathfrak{P}, \operatorname{grad}\psi)$, $\psi = \int\frac{dv}{r}$ Potential einer homogen geladenen Vollkugel, für äußere Punkte gleich

$$\psi = \frac{4\pi a^3}{3}\frac{1}{R}, \quad \varphi_p = -|\mathfrak{P}|\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{4\pi a^3}{3}|\mathfrak{P}|\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} = -|\mathfrak{M}|\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}$$

$$= -\left(\mathfrak{M}\operatorname{grad}\frac{1}{R}\right) = -\frac{4\pi a^3}{3}\left(\mathfrak{P}\operatorname{grad}\frac{1}{R}\right) = \frac{4\pi a^3}{3}\frac{(\mathfrak{R}\mathfrak{P})}{R^3} = |\mathfrak{M}|\frac{z}{R^3}$$

Innen: $\varphi_p = -(\mathfrak{P}\operatorname{grad}\psi)$; $\operatorname{grad}\psi$: Feldstärke, die von homog. gelad. Vollkugel erzeugt. $-\operatorname{grad}\psi =$

$$\frac{4\pi R^3}{3}\frac{\cancel{1}}{R^2}\frac{\mathfrak{R}}{R} = \frac{4\pi}{3}\mathfrak{R}, \quad \varphi_p = \frac{4\pi}{3}(\mathfrak{R}\mathfrak{P})$$

φ_p innen $\frac{4\pi}{3}(\mathfrak{R}\mathfrak{P})$ außen $\frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{R^3}(\mathfrak{R}\mathfrak{P})$

$\mathfrak{E}_{p\,\text{innen}} = -\operatorname{grad}\varphi_p = -\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$, d. h. entgegengesetzte Richtung wie $\mathfrak{P}$ und unabhängig vom Radius, homogen wie verlangt.

Rechnen wir, $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{E}_0$ erzeugt, wie groß $\mathfrak{P}$?

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_p, \quad \mathfrak{P} = \kappa\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{E}_p = -\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P} = -\frac{4\pi}{3}\kappa\mathfrak{E} \qquad \kappa = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}$$

$$\mathfrak{E}\left(1 + \frac{4\pi\kappa}{3}\right) = \mathfrak{E}_0, \quad \mathfrak{E} = \frac{3}{3+4\pi\kappa}\mathfrak{E}_0, \quad \mathfrak{P} = \frac{3\kappa}{3+4\pi\kappa}\mathfrak{E}_0$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P} = (1+4\pi\kappa)\mathfrak{E} = \varepsilon\mathfrak{E} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0, \quad \mathfrak{E} = \frac{3}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0, \quad \mathfrak{P} = \kappa\mathfrak{E} = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0$$

Außen $\mathfrak{E} = \mathfrak{D} = -\operatorname{grad}(\varphi_0 + \varphi_p) = \mathfrak{E}_0 - \operatorname{grad}\left(|\mathfrak{M}|\frac{z}{R^3}\right)$

$$\mathfrak{M} = \frac{4\pi a^3}{3}\mathfrak{P} = a^3\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\mathfrak{E}_0$$

Ansatz möglich. Abweichung zeigt Erfüllung d. Grenzbedingungen: $\mathfrak{E}_t$ und $\mathfrak{D}_n$ stetig an Oberfläche

$\mathfrak{E}_t$ stetig heisst φ stetig, $\varphi_{pi} = \frac{4\pi}{3}(\mathfrak{R}\mathfrak{P})$, $\varphi_{pa} = \frac{4\pi}{3}\frac{a^3}{R^3}(\mathfrak{R}\mathfrak{P})$

$\mathfrak{D}_n = \mathfrak{D}_R$ Innen $\mathfrak{D} = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{D}_r = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0 \cos\vartheta$

außen $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_p$

$$\mathfrak{D}_R = \mathfrak{E}_0 \cos\vartheta - \mathrm{grad}_R \varphi_{pa} = \mathfrak{E}_0 \cos\vartheta - \mathrm{grad}_R |\mathfrak{M}| \frac{z}{R^3}$$

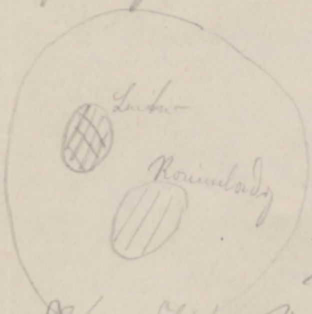
$$-\mathrm{grad}_R \varphi_{pa} = -|\mathfrak{M}| \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\cos\vartheta}{R^2}\right) = |\mathfrak{M}| \frac{2\cos\vartheta}{R^3}$$

$$\mathfrak{D}_R = \mathfrak{E}_0 \cos\vartheta + |\mathfrak{M}| \frac{2}{R^3} \cos\vartheta = \mathfrak{E}_0 \cos\vartheta \left(1 + \frac{a^3}{R^3}\frac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2}\right)$$

für $R = a$, $\mathfrak{D}_R = \frac{\varepsilon+2+2\varepsilon-2}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0 \cos\vartheta = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0 \cos\vartheta$

17. Stunde

Energie, beschränken uns auf homogene Dielektrizitäten



$$U = \frac{1}{2}\sum e_i \varphi_i = \frac{1}{2}\underbrace{\int \varphi \rho \, dv}_{\text{Raumladg.}} + \frac{1}{2}\underbrace{\int \varphi \omega \, df}_{\text{Leiter}}$$

Energie sitzt dort, wo Ladung sitzt. Unklar. Können nur Betrag von Energie angeben (Arbeit), nicht wo Energie sitzt. Bemerkenswert ∞ ferne Fläche Umformung, so dass Energie im ganzen Raume zu sitzen scheint. Nahewirkungstheorie.

$4\pi\rho = \mathrm{div}\,\mathfrak{D}$, $4\pi\omega = \mathfrak{D}_n$ Normale Leiter → Dielektr.

Können Integral $\frac{1}{2}\int \varphi\omega\, df = \frac{1}{8\pi}\int \varphi \mathfrak{D}_n\, df$ über Leiteroberfläche um in Volumintegral über Raum begrenzt von Leiteroberfläche und ∞ ferner Fläche.

Gauss: $\int \mathfrak{A}_n\, df = \int \mathrm{div}\,\mathfrak{A}\, dv$. Normale nach außen d.h. Dielektr → Leiter, also Vorzeichen umkehren.

$$\frac{1}{8\pi}\underbrace{\int \varphi \mathfrak{D}_n\, df}_{\text{Leiteroberfläche}} + \frac{1}{8\pi}\underbrace{\int \varphi \mathfrak{D}_n\, df}_{\infty\text{ ferne Fläche}} = -\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{div}(\varphi\mathfrak{D})\, dv$$

Integral über ∞ ferne Fläche = 0, falls Ladgn. u. Leiter nur im Endlichen, weil $\varphi \sim \frac{1}{r}$; $\mathfrak{D} \sim \frac{1}{r^2}$, $df \sim r^2 d\Omega$

$$\frac{1}{8\pi}\underbrace{\int \varphi \mathfrak{D}_n\, df}_{\text{Leiteroberfläche}} = -\frac{1}{8\pi}\int \varphi\, \mathrm{div}\,\mathfrak{D}\, dv - \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{D}\,\mathrm{grad}\,\varphi\, dv$$

$$= -\frac{1}{2}\int \varphi\rho\, dv + \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{D}\mathfrak{E})\, dv$$

$$U = \frac{1}{2}\underbrace{\int \varphi\rho\, dv}_{\text{Raumladgsraum}} - \frac{1}{2}\underbrace{\int \varphi\rho\, dv}_{\substack{=\text{ gesamter Raum}\\ \text{weil } \rho=0 \text{ im ladungsfreien Raum}}} + \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{D}\mathfrak{E})\, dv$$

$U = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{D}\mathfrak{E})\, dv$ über gesamten Raum, d.h. die in der Volumeinheit enthaltene Energie ist $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{D}\mathfrak{E}) = \frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2$.

Später wird sich zeigen, dass letzter Ausdruck für beliebige, nicht nur statische Felder gilt.

Eindeutigkeitsbeweis

Es sei gegeben eine bestimmte Ladungsverteilung d.h. im ganzen Raume ρ und e_i od. V_i. Dann soll gelten $4\pi\rho = \mathrm{div}\,\mathfrak{D}$, $4\pi\omega = \mathfrak{D}_n$, $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$

entweder V_i od. e_i Ladg. d. i-ten Leiters gegeben! [Gauss Verteilung auf Leiter)

Behauptung: Es gibt nur ein bestimmtes $\mathfrak{D}$ u. φ (bis auf add. Konstante). Denn gäbe es $\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{D}_2$, so müsste für $\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}'$ überall gelten $\mathrm{div}\,\mathfrak{D}' = 0$.

weil für i-ten Leiter $\frac{1}{2}\int \varphi'\omega' df = \frac{1}{2}\varphi_i \int \omega' df = \frac{1}{2}\varphi_i e_i'$, da auf Leiter φ konst.

Also $\rho' = 0$, $e_i' = 0$ und $U' = \frac{1}{2}\int \varphi'\rho' dv + \frac{1}{2}\int \varphi'\omega' df = 0$. Andererseits ist aber $U' = \frac{\varepsilon}{8\pi}\int \mathfrak{E}'^2 dv$. Falls also $U' = 0$ sein soll, muss $\mathfrak{E}'$ und damit $\mathfrak{D}'$ überall gleich Null sein, weil $\mathfrak{E}'^2$ stets positiv, d.h. $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_2$.

$$\mathrm{grad}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_x + \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_y + \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_z)$$

$$= \mathfrak{A}_x\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} + \mathfrak{A}_z\frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x} + \ldots$$

$$= \mathfrak{A}_x\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial x} + \mathfrak{A}_y\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y} + \mathfrak{A}_z\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} + \mathfrak{A}_y\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial y}\right) - \mathfrak{A}_z\left(\frac{\partial \mathfrak{B}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{B}_z}{\partial x}\right) + \ldots$$

$$= (\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{B}_x) + \mathfrak{A}_y\,\mathrm{rot}_z\mathfrak{B} - \mathfrak{A}_z\,\mathrm{rot}_y\mathfrak{B} + \ldots$$

$$= (\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{B}_x) + [\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]_x + (\mathfrak{B}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{A}_x) + [\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]_x$$

$$\mathrm{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\,\mathrm{grad})\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\,\mathrm{grad})\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]$$

Bezeichnung so und nicht $(\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{B})$, weil $(\mathfrak{A}\nabla\mathfrak{B})$ heißen würde $(\mathfrak{A}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B})$.

$\boxed{\text{13. Stunde}}$

Dielektrika

Ladungen in Dielektriken $\mathfrak{E}=\frac{1}{\varepsilon}\mathfrak{E}_0$, dielektr. Konstante, homogen isotrop.

Vorerst alles beim alten: $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}=0,\ \mathfrak{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi$

$$\varphi=\frac{1}{\varepsilon}\varphi_0=\frac{1}{\varepsilon}\sum\frac{e_i}{r_i}=\frac{1}{\varepsilon}\int\rho\frac{dv}{r}+\int\frac{\omega\,df}{r}$$

$$\int\mathfrak{E}_n\,df=\frac{1}{\varepsilon}4\pi\sum e,\ \mathrm{div}\,\mathfrak{E}=\frac{1}{\varepsilon}4\pi\rho,\ \mathfrak{E}_n=\frac{1}{\varepsilon}4\pi\omega$$

Vektor $\mathfrak{D}=\varepsilon\mathfrak{E}$ eingeführt: dielektr. Verschiebung Maxwell, Erregung Lorentz $\int\mathfrak{D}_n\,df=\sum e$

$$\int\mathfrak{D}_n\,df=4\pi\sum e,\ \mathrm{div}\,\mathfrak{D}=4\pi\rho,\ \mathfrak{D}_n=4\pi\omega,\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{E}=0,\ \mathfrak{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi$$

ferner $\mathrm{div}\,\mathfrak{E}=4\pi\rho'$, $\mathfrak{E}_n=4\pi\omega'$ freie Elektrizität $\varphi=\int\frac{\rho'\,dv}{r}+\int\frac{\omega'\,df}{r}$

Falls Dielektrikum nicht homogen und nicht isotrop, sollen obige Gleich.-Definitionen für $\mathfrak{D},\rho',\omega'$ sein. Dann, falls nicht zusammenhängen zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ gegeben. Falls dielektr. isotrop, zeigt Erfahrung, dass $\mathfrak{D}=\varepsilon\mathfrak{E}$ die Erscheinungen beschreibt. Falls nicht isotrop: $\mathfrak{D}_x=\varepsilon_{11}\mathfrak{E}_x+\ldots,\ \mathfrak{D}_y=\ldots,\ \mathfrak{D}_z=\ldots$ ε Tensor. Gibt Fälle, wo $\mathfrak{D}$ von Vorgeschichte abhängig, nicht durch momentanes $\mathfrak{E}$ bestimmt ist. Beschränken uns im folgenden auf isotrope Körper, dagegen inhomogene. Ferner ... später ..., zunächst bequem.

Ladungsfreie Grenzfläche: $\mathrm{div}\,\mathfrak{D}=0,\ \mathfrak{D}_{n_1}-\mathfrak{D}_{n_2}=0=\varepsilon_1\mathfrak{E}_{n_1}-\varepsilon_2\mathfrak{E}_{n_2}$,

$\mathfrak{E}_{n_1}-\mathfrak{E}_{n_2}=4\pi\omega'=\mathfrak{E}_{n_1}-\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\mathfrak{E}_{n_1}$, d.h. an Grenzfläche zweier Dielektr. sitzt freie Elektr. $=\mathfrak{D}_n\left(\frac{1}{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)$.

Brechungsgesetz der Kraftlinien. Grenzfläche ohne wahre Ladung $\mathfrak{D}_{n_1}-\mathfrak{D}_{n_2}=0,\ \mathrm{rot}\,\mathfrak{E}=0,\ \mathfrak{E}_{t_1}-\mathfrak{E}_{t_2}=0$

$\mathfrak{D}_1=\varepsilon_1\mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{D}_2=\varepsilon_2\mathfrak{E}_2,$ $\mathfrak{D}_{n_1}=\mathfrak{D}_1\cos\alpha_1=\mathfrak{D}_{n_2}=\mathfrak{D}_2\cos\alpha_2$

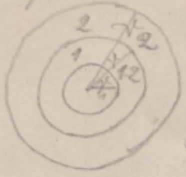
$\mathfrak{E}_{t_1}=\mathfrak{E}_1\sin\alpha_1=\mathfrak{E}_{t_2}=\mathfrak{E}_2\sin\alpha_2,\ \varepsilon_1\mathfrak{E}_1\cos\alpha_1=\varepsilon_2\mathfrak{E}_2\cos\alpha_2$

$\frac{1}{\varepsilon_1}\mathrm{tg}\,\alpha_1=\frac{1}{\varepsilon_2}\mathrm{tg}\,\alpha_2,\ \mathrm{tg}\,\alpha_1/\mathrm{tg}\,\alpha_2=\varepsilon_1/\varepsilon_2$ d.h. Kraftlinien werden bei Eintritt in größeres ε von Normale weggebrochen.

Kondensator: $C=\frac{e}{\varphi_1-\varphi_2}=\frac{e}{\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1^0-\varphi_2^0)}=\varepsilon C_0$ Kapazität wird ε fach vergrößert.

ρ' wo $\nabla\varepsilon\neq0$, denn $\mathrm{div}\,\mathfrak{D}=0$
$=\mathrm{div}\,\varepsilon\mathfrak{E}=\varepsilon\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}+\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon=0$
$\varepsilon\rho'=-\mathfrak{E}\nabla\varepsilon$
$\mathrm{div}\,\frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon}=\rho'=\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{div}\,\mathfrak{D}+\mathfrak{D}\nabla\frac{1}{\varepsilon}$
$=-\frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon^2}\nabla\varepsilon,\ \varepsilon\rho'=-\mathfrak{E}\nabla\varepsilon$

Kugelkondensator mit zwei Dielektr.



Innen $+e$, außen $-e$ $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_r$ vord. Symmetrie

$\int \mathfrak{D}_r\, df = 4\pi e = \mathfrak{D}_r 4\pi r^2, \mathfrak{D}_r = \frac{e}{r^2}$

$\mathfrak{E}_r$ in 1: $\frac{1}{\varepsilon_1}\frac{e}{r^2}$, $\mathfrak{E}_r$ in 2: $\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{e}{r^2}$

$\mathfrak{D}_{n_1} - \mathfrak{D}_{n_2} = 0$ und $\mathfrak{E}_{t_1} - \mathfrak{E}_{t_2} = 0$ erfüllt an Grenzfläche

$\mathfrak{D}_{r_1} = \frac{e}{r_1^2} = 4\pi\omega_1,\ \omega_1 = \frac{e}{4\pi r_1^2}$

$4\pi\omega' = \mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2}$ innen $\mathfrak{E}_n = \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{e}{r_1^2} = 4\pi\omega_1',\ \omega_1' = \frac{1}{\varepsilon_1}\omega_1$

gerechnet von 1 auf 2

Trennungsfläche $\mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2} = (\mathfrak{E}_{r_1} - \mathfrak{E}_{r_2}) = \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right)\frac{e}{r_{12}^2} = 4\pi\omega_{12}'$

$\omega_{12}' = \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\frac{e}{4\pi r_{12}^2},\ \omega_2' = -\frac{1}{\varepsilon_2}\omega_2 = -\frac{1}{\varepsilon_2}\frac{e}{4\pi r_2^2}$

$4\pi r_1^2\omega_1' + 4\pi r_{12}^2\omega_{12}' + 4\pi r_2^2\omega_2' = 0$

$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_2^1 \frac{\partial\varphi}{\partial r} dr = \int_1^2 \mathfrak{E}_r\, dr = \int_{r_1}^{r_{12}} \frac{1}{\varepsilon_1}\frac{e}{r^2} dr + \int_{r_{12}}^{r_2} \frac{1}{\varepsilon_2}\frac{e}{r^2} dr$

$= \frac{e}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}}\right) + \frac{e}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_2}\right)$ $\quad r_{12} \gg r_1,\ r_2 \gg r_1$

$C = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_2}\right)}$ $\quad C = \varepsilon_1 r_1$

[illegible]

14. Stunde

Gleichungen, die elektrostat. Erscheinung in Diel. beschreiben

$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0,\ \mathfrak{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$

$\int \mathfrak{D}_n\,df = 4\pi \sum e,\ \mathrm{div}\,\mathfrak{D} = 4\pi\varrho,\ \mathfrak{D}_{n_1} - \mathfrak{D}_{n_2} = 4\pi\omega$ Maxwell $\int \mathfrak{D}_n\,df = \sum e$

$\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 4\pi\varrho';\ \mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2} = 4\pi\omega',\ \varphi = \int \frac{\omega'\,df}{r} + \int \frac{\varrho'\,dv}{r}$

Lies, Inhalt erst durch Zusammenhang zw. $\mathfrak{D}$ u. $\mathfrak{E}$. Setzt $\underline{\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}}$

Beispiel: Kugelkondensator

Polarisation.

Was wird in Wirklichkeit passieren, wenn wir Dielektrikum ins Feld bringen. Molekül besteht aus pos. und neg. Elementarladungen, im ganzen neutral. Im Feld auseinandergezogen, jedes Molekül Dipol, dessen Moment m von $\mathfrak{E}$ abhängig. Potential $\varphi = (m, \mathrm{grad}_q \frac{1}{r}) = -(m, \mathrm{grad}\frac{1}{r})$. Für dv in Entfernungen, die groß gegen Abmessungen von dv sind, wird $\sum(m, \mathrm{grad}_q \frac{1}{r}) = (\sum m, \mathrm{grad}_q \frac{1}{r}) = (M, \mathrm{grad}_q \frac{1}{r})$. M vektorielle Summe. Falls Moleküle selbst Dipole, ohne Feld $M = 0$, weil [?] Isotropie, mit Feld $M \sim \mathfrak{E}$ (abhängig). M prop dv, weil Zahl d. Moleküle prop dv, setzen $M = \mathfrak{P}\,dv$, wobei $\mathfrak{P}$ Polarisation d. Volumeneinheit. $\mathfrak{P} = k\mathfrak{E}$. Bringen wir also Dielektr. ins Feld, so werden die einzelnen Volumenelemente zu Dipolen, und es wird $\varphi = \int(\mathfrak{P}\,dv, \mathrm{grad}\frac{1}{r})$
$\varphi = \varphi_0 + \int(\mathfrak{P}, \mathrm{grad}\frac{1}{r})\,dv$, wobei φ_0 das von den wahren Ladungen herrührende Feld ist, also $\varphi_0 = \int \frac{df\,\omega}{r} + \int \frac{dv\,\varrho}{r}$. Berücksichtigt muss werden, daß Ladungsverteilung durch Hineinbringen des Dielektr. sich im allgemeinen ändern wird. Nachweis, daß wir so zu denselben Formeln gelangen.

$\varphi = \varphi_0 + \int dv(\mathfrak{P}, \mathrm{grad}_q \frac{1}{r})$ Transformation

Nach Gauß $\int \psi\,\mathfrak{A}_n\,df = \int \mathrm{div}(\psi\mathfrak{A})\,dv = \int \psi\,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}\,dv + \int \mathfrak{A}\nabla\psi\,dv$

$\int(\mathfrak{P}, \mathrm{grad}_q \frac{1}{r})\,dv = \int \frac{\mathfrak{P}_n}{r}\,df - \int \frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{P}}{r}\,dv$ ($\mathrm{grad}_q \frac{1}{r}$ weil bei festgehaltenem Aufpunkt über Koord. d. Volumenelem. d. Dielektr. transformiert wird).

$\varphi = \int \frac{\omega\,df}{r} + \int \frac{\varrho\,dv}{r} + \int \frac{\mathfrak{P}_n\,df}{r} - \int \frac{\mathrm{div}\,\mathfrak{P}\,dv}{r}$

$= \int \frac{(\omega + \mathfrak{P}_n)\,df}{r} + \int \frac{(\varrho - \mathrm{div}\,\mathfrak{P})\,dv}{r}$. Erhalten unsere Formeln,

falls wir setzen $\omega' = \omega + \mathfrak{P}_n \left(= \frac{1}{4\pi}(\mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2})\right),\ \varrho' = \varrho - \mathrm{div}\,\mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\,\mathfrak{E}$

$\varrho = \varrho' + \mathrm{div}\,\mathfrak{P} = \frac{1}{4\pi}\mathrm{div}\,\mathfrak{E} + \mathrm{div}\,\mathfrak{P},\ 4\pi\varrho = \mathrm{div}(\mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}) = \mathrm{div}\,\mathfrak{D}$

$\mathfrak{P} = k\mathfrak{E},\ \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P} = (1 + 4\pi k)\mathfrak{E},\ 4\pi\varrho = \mathrm{div}\,\mathfrak{D},\ \mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}$

$\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E},\ \varepsilon = 1 + 4\pi k$

$\boxed{\text{15 Stunde}}$

Energie

Punktladungen: Nullzustand alle Ladungen im ∞
zwei pos. e_1, e_2. Arbeit die System leistet, um ..
gleich Differenz der Potentiale für Einheitsladung,

$\underset{1}{\overset{e_1}{\times}}$ $\underset{2}{\overset{e_2}{\times}}$ $\varphi_2 = \frac{e_1}{r_{12}}$, φ_2 im ∞ Null, also φ_2 Arbeit für Einheitsladung für Ladung e_2 wird $U = e_2 \frac{e_1}{r_{12}} = e_2 \varphi_2 = e_1 \varphi_2 = \frac{1}{2}\sum e_i \varphi_i$

$\varphi_i = \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k \neq i} \frac{e_k}{r_{ik}}$, $U = \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{i \neq k} \frac{e_i e_k}{r_{ik}}$

Gilt für n Punkte:

$$\begin{array}{llllll} U = & A_{12} + A_{13} + A_{14} + \cdots & A_{1n} & = e_1 \varphi_1 \\ & A_{21} + A_{23} + A_{24} + \cdots & A_{2n} & = e_2 \varphi_2 \\ & A_{31} + A_{32} + A_{34} + \cdots & A_{3n} & = e_3 \varphi_3 \\ & \vdots & \vdots & \\ & A_{n-1,1} & A_{n-1\,n} & = e_{n-1} \varphi_{n-1} \\ & A_{n1} & A_{n\,n-1} & = e_n \varphi_n \end{array}$$

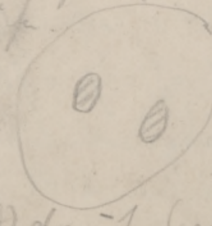
$U = \frac{1}{2}\sum e_i \varphi_i$
Vakuum oder homogenes Dielektrikum

Kondensator $\overset{\varphi_1}{+e}, \overset{\varphi_2}{-e}$
$U = \frac{1}{2} e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}\frac{e^2}{K} = \frac{1}{2} K \varphi^2$
$K = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}$

Geladene Leiter: φ auf Leiter konstant also $U = \frac{1}{2}\varphi \sum e_i = \frac{1}{2} e \varphi$, ferner $U = \frac{1}{2}\sum e_i \varphi_i$, wobei jetzt e_i Ladung, φ_i Potential des i-ten Leiters bedeutet. $e_i = \int \omega\, df$ also
$U = \frac{1}{2}\int \varphi \omega\, df$ über alle Leiteroberflächen.

Umformung in Volumenintegral
$4\pi\omega = D_n$, $U = \frac{1}{8\pi}\int \varphi D_n\, df$

Raum, begrenzt außen im homogenen Dielektrikum von ∞ fernen geschlossenen Fläche.



An letzter Grenze $D_n = 0$, φ wie $\frac{1}{r}$, D_n wie $\frac{1}{r^2}$, df nur prop. r^2, also $\int \varphi D_n\, df = 0$

– weil Normale umgekehrt

$$U = \frac{1}{8\pi}\int (\varphi D)_n\, df = -\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\varphi D)\, dv = -\frac{1}{8\pi}\int \varphi \operatorname{div} D\, dv - \frac{1}{8\pi}\int D \operatorname{grad}\varphi\, dv$$

erstes Integral Null wegen $\rho = 0$, ferner $\operatorname{grad}\varphi = -E$ also

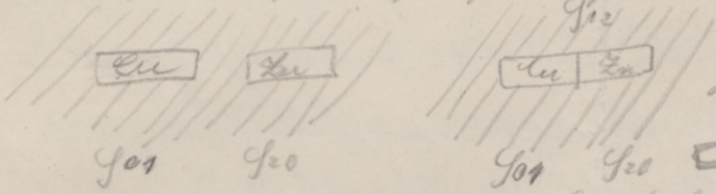
$$\underline{\underline{U = \frac{1}{8\pi}\int (E D)\, dv}} = \frac{1}{8\pi}\int \varepsilon E^2\, dv$$

11. Stunde

Physikalisches über Doppelschicht. Potentialsprung an Doppelschicht und Kontaktspannung, weil an Grenzfläche (Berührungsfläche) von 2 Körpern auftretend.

Wenn nur 2 Körpergrenzflächen vorkommen, (elektrostatisch) nicht nachweisbar, weil Doppelschicht geschlossen, also $\varphi = 0$. Anders, wenn 3 Körper in Grenzfläche zusammenstoßen.

daß durch Doppelschichtsprung und Doppelkathode



3 ungeschlossene Doppelschichten

mit Isolator

Der gleichen Randkurven. Die Feldwirkung einer ungeschlossenen Doppelschicht wird von Randkurve erzeugt, kann ich mir alle 3 auf dieselbe durch die Randkurven begrenzte im übrigen beliebigen Fläche angeordnet denken. Die Außenwirkung ist so, als wäre diese Doppelschicht mit Potentialsprung $\varphi_{01} + \varphi_{12} + \varphi_{20} = \varphi$ belegt. Feldverlauf:

Im Innern der Metalle $\varphi = 0$, also müssen durch die Doppelschichten Flächenladungen hervorgerufen, welche in den Metallen das von d. Doppelschicht herrührende φ kompensieren.

1 | 2 Elektrostatisch nachweisbar nur φ. Voltasche Spannung, abhängig von Natur d. Leiter u. Isolator

φ 0

Mehrere Leiter 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 1, 2, 3 … n

$\varphi = \varphi_{01} + \varphi_{12} + \cdots \varphi_{n0}$ Spannung der Voltaschen Kette

Ist n-ter Leiter aus demselben Material wie erster, so ist $\varphi_{01} = \varphi_{0n} = -\varphi_{n0}$ also $\varphi = \varphi_{12} + \cdots \varphi_{n-1,n}$

d. h. Spannung unabhängig von Isolator heißt dann galvanische Kette. Es zeigt sich, daß $\varphi \neq 0$ nur möglich, falls mindestens einer der Leiter Elektrolyt. Grund zeigt sich, falls geschlossene Kette aus Metallen betrachtet.

$Cu/Zn/ZnSO_4\,aq/CuSO_4/Cu$

Falls Feld elektrostatisch, muß $\oint \mathfrak{E}_s\, ds = 0$ sein, d. h. $\varphi_{13} = \varphi_{12} + \varphi_{23}$, oder $\varphi_{12} + \varphi_{23} + \varphi_{31} = 0 = \varphi$

Gesetz der Voltaschen Spannungsreihe. Leiter, die diesem Gesetz gehorchen, Leiter erster Klasse (Metalle). Anders ausgedrückt $\varphi_{12} = \varphi_{32} - \varphi_{31}$. Leiter 3 beliebig, wie für allemal festgesetzt. Dann ist jeder Leiter erster Klasse durch eine φ_1, φ_2 .. und φ_{ik} für beliebige i und k daraus berechenbar. In Spannungsreihe geordnet jeder Leiter mit vorigem berührt pos. mit nachfolgendem neg. Also für geschlossene u. offene galvanische Kette

(beide Enden gleiches Metall)

ist immer $\varphi = 0$. Für offene Voltakette ebenfalls Spannungsreihe aufstellbar, denn $\varphi = \varphi_{01} + \varphi_{12} + \varphi_{20}$ und $\varphi_{12} = \varphi_2 - \varphi_1$, also $\varphi = \varphi_2 + \varphi_{20} - \varphi_1 - \varphi_{10} = \varphi_2' - \varphi_1'$, wobei $\varphi_1' = \varphi_1 + \varphi_{10}$ und $\varphi_2' = \varphi_2 + \varphi_{20}$, d. h. $\varphi_1 = \varphi_{13} + \varphi_{10}$ abhängig von Natur des Isolators. Also für jeden Isolator besondere Spannungsreihe, keine [illegible]. Galvanische Kette mit $\varphi \neq 0$ nur möglich elektrostatisch, falls offen. $\varphi \neq 0$ nur, falls Leiter zweiter Klasse (Elektrolyte). Falls geschlossen, elektrostatisch nicht möglich, weil $\oint \mathfrak{E}_s ds \neq 0$; Strom.

$\boxed{\text{12. Stunde}}$

Übungen:

Zylinderkondensator:

$\iint \mathfrak{E}_r\, r\, d\varphi\, dh = \mathfrak{E}_r\, 2\pi r = 4\pi\omega_1\, 2\pi r_1 = 4\pi\omega_2\, 2\pi r_2$

$\mathfrak{E}_r = \frac{4\pi\omega_1 r_1}{r} = \frac{4\pi\omega_2 r_2}{r}$, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$, $\varphi = \int \mathfrak{E}_r\, dr$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \mathfrak{E}_r\, dr$

$= 4\pi\omega_1 r_1 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = 4\pi\omega_1 r_1 \ln\frac{r_2}{r_1}$, $\varphi = -4\pi\omega_1 r_1 \ln\frac{r}{r_1}$, $\varphi_1 = 0$

$\Delta\varphi = 0$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$, $\varphi = \varphi(r,\vartheta) = \varphi(r)$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\vartheta}{\partial x}}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$

$x^2 + y^2 = r^2$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{r} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\frac{x}{r} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}$

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{d\varphi}{dr}\frac{1}{r}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)$

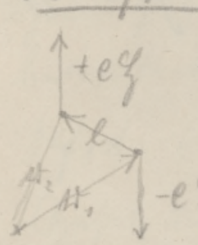
$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = 0$ (Kugel $\frac{2}{r}$, $\varphi' r^2 = \text{konst}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{k}{r^2}$, $\varphi = \frac{k}{r}$)

$\frac{d\varphi}{dr} = \varphi'$, $\frac{d\varphi'}{dr} + \frac{\varphi'}{r} = 0$, $d\ln\varphi' + d\ln r = 0$, $\varphi' r = \text{konst}$

$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\text{konst}}{r} = \frac{a}{r}$, $\varphi = a\ln r + b$, $-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)_{r_1} = \mathfrak{E}_{r_1} = 4\pi\omega_1 = \frac{\text{konst}}{r_1}$

$\text{konst} = 4\pi\omega_1 r_1$, $\mathfrak{E}_r = \frac{4\pi\omega_1 r_1}{r}$

Kraft auf Dipol: $\sum\mathfrak{K} = \sum m\ddot{\mathfrak{r}}$, $\sum[\mathfrak{r}\mathfrak{K}] = \sum[\mathfrak{r}, m\ddot{\mathfrak{r}}]$



Drehmoment: $[\mathfrak{l}\, e\mathfrak{E}] = [\mathfrak{m}\mathfrak{E}]$, $\sum\mathfrak{K} = 0$

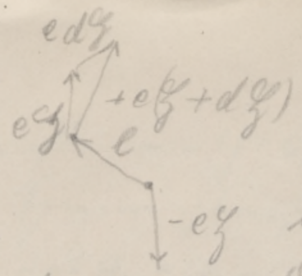
Feld inhomogen: $e(\mathfrak{E} + d\mathfrak{E}) - e\mathfrak{E} = \sum\mathfrak{K}$

$[\mathfrak{r}_1, -e\mathfrak{E}] + [\mathfrak{r}_2, +e\mathfrak{E}] = -[\mathfrak{r}_1, e\mathfrak{E}] + [(\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{l}), e\mathfrak{E}] = [\mathfrak{m}\mathfrak{E}]$

Falls inhomogen, hängt Kräftepaar vom Bezugspunkt ab, weil $\sum\mathfrak{K} \neq 0$.

$\sum\mathfrak{K} = e\,d\mathfrak{E} = e\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial l}|\mathfrak{l}| = (e\mathfrak{l}\,\mathrm{grad})\mathfrak{E} = (\mathfrak{m}\,\mathrm{grad})\mathfrak{E}$ (so geschrieben, weil $\mathfrak{l}\nabla\mathfrak{E} = \mathfrak{l}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}$ sein würde) Vektor, der die Änderung von $\mathfrak{E}$ nach Größe u. Richtung gibt, wenn man um $\mathfrak{l}$ fortschreitet

$\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial l} = \lim_{\Delta l = 0}\frac{\Delta\mathfrak{E}}{\Delta l}$ Komp.: $\mathfrak{m}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_x$, $\mathfrak{m}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_y$, $\mathfrak{m}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_z$

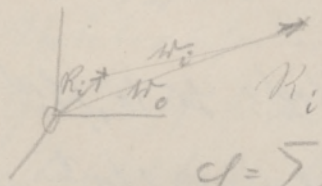


Dann $\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial l}\right)_x = \frac{\partial \mathfrak{z}_x}{\partial l} = \operatorname{grad}_l \mathfrak{z}_x$

also $|l|\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial l}\right)_x = |l| \operatorname{grad}_l \mathfrak{z}_x = (l \nabla \mathfrak{z}_x)$

$$\mathfrak{d}_x = e\,d\mathfrak{z}_x = e\left(\frac{\partial \mathfrak{z}_x}{\partial x} l_x + \cdot\ \cdot\right) = e(l \nabla \mathfrak{z}_x) = (\mathfrak{m} \nabla \mathfrak{z}_x)$$

Potential eines Moleküls:



$R_i + r_i = r_0,\ r_i = r_0 - R_i$

$R_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i),\ r_0(x, y, z)$

$$\varphi = \sum \frac{e_i}{r_i} \quad r_i = \sqrt{(x-\xi_i)^2 + (y-\eta_i)^2 + (z-\zeta_i)^2}$$

$$f(x+a, y+b, z+c) = f(x,y,z) + a\frac{\partial f}{\partial x} + \cdot\ \cdot + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \cdot\ \cdot + ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \cdot\ \cdot$$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_0} - \xi\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)_{r_0} - \cdot\ \cdot\ \cdot + \frac{1}{2}\xi^2\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}\right)_{r_0} + \cdot + \cdot + \xi\eta\left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}\right)_{r_0} + \cdot +$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3},\ \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5} = \frac{1}{r^3}\left(\frac{3x^2}{r^2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} = +\frac{3xy}{r^5}$$

$$\varphi = \frac{\sum e_i}{r} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{x}{r}\sum e_i \xi_i + \cdot + \cdot\right] + \frac{1}{r^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{r^2} - 1\right)\sum e_i \xi_i^2 + \cdot\right.$$

$$\left. + \cdot + \frac{3xy}{r^2}\sum e_i \xi_i \eta_i + \cdot + \cdot\right] + \cdot$$

$\cancel{\sum e_i \zeta_i = \zeta_0 \sum e_i,}$ $\cancel{\text{geschnitten wegen } \sum e_i = 0}$ $\quad \varphi = \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\sum e_i \xi_i + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\sum e_i \eta_i + \cdot\ \right]$

$\cancel{= \sum e_i \left(R_0 \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)} = \sum \left(\mathfrak{M} \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right)$

$\mathfrak{M}_x = \sum e_i \xi_i = \sum \mathfrak{m}_{x_i},\ \mathfrak{M} = \sum \mathfrak{m}$

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_0} + R_i \operatorname{grad}\frac{1}{r},\ \sum \frac{e_i}{r_i} = \frac{\sum e_i}{r_0} + \left(\sum e_i R_i, \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right)$$

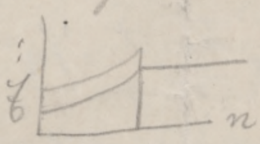
9. Stunde

An Leiteroberfläche erleidet also $\mathfrak{E}_n$ einen Sprung, denn im Innern $\mathfrak{E}_n = 0$, außen $\mathfrak{E}_n = 4\pi\omega$. Befindet sich eine Flächenladung an der Grenzfläche zweier Isolatoren $1/2$, so können wir eine ganz analoge Überlegung machen, wodurch man

$$\int \mathfrak{E}_n \, df = \mathfrak{E}_{n_1}\Delta f - \mathfrak{E}_{n_2}\Delta f = 4\pi \Delta e, \quad \mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2} = 4\pi\omega$$ (Dielektr.! später)

$\mathfrak{E}_{n_1} - \mathfrak{E}_{n_2}$ wird auch Flächendivergenz genannt. An Grenzfläche $\mathfrak{E}_n$ unstetig, φ stetig, denn es ist $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \mathfrak{E}_s \, ds$, wenn $\mathfrak{E}_s$ endlich, also $\varphi_1 - \varphi_2$ Null wird, wenn 1 und 2, auf verschiedenen Seiten der Grenzfläche liegend, einander immer näher rücken. Nachweis direkt: Kugelschale.

An Leiteroberfläche:



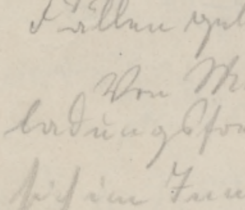
Gegeben meist Leiter in Isolator (Luft).
Ist φ bekannt, so folgt Elektrizitätsverteilung aus ($\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho$ und) $\mathfrak{E}_n = 4\pi\omega$. Ist ω (und ϱ) bekannt, so ist φ und $\mathfrak{E}$ auch berechenbar.

Grundproblem d. Elektrostatik: Leiter von gegebener Gestalt mit gegebenen Gesamtladungen:

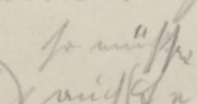
$$e_i = \int \omega_i \, df_i = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial\varphi}{\partial n_i}$$

Auf jeder Leiteroberfläche φ konst. Im Luftraum $\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\Delta\varphi = 0$. Gesucht Lösung der Laplaceschen Gleichung $\Delta\varphi = 0$, die diesen Bedingungen entspricht. Nur in einfachen Fällen gelöst. Probieren.

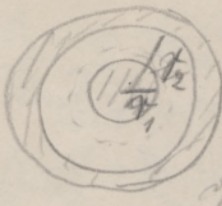
Eine Metallhülle umgebe einen Hohlraum, ladungsfrei: $\int \mathfrak{E}_n \, df = 0$ überall $\mathfrak{E} = 0$. Befinden sich im Innern des Hohlraums Ladungen $\sum e_i$,



so müssen, da $\mathfrak{E} = 0$ in Metallhülle, also auch $\int \mathfrak{E}_n \, df = 0$ über Fläche in Metallhülle, auf Innenfläche Ladungen $-\sum e_i$ sitzen, auf Außenfläche $\sum e_i$.

Influenz  $\int \mathfrak{E}_n \, df = e$

Kugelkondensator



Gesamtladung auf Oberfläche der Innenkugel $+e$, auf Innenfläche der Außenkugel $-e$. Aus Symmetriegründen $\omega_1 = \text{konst} = \frac{e}{4\pi r_1^2}$, $\omega_2 = -\frac{e}{4\pi r_2^2}$

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_{n_1} \overset{= \mathfrak{F}_{r_1}}{=} 4\pi\omega_1 = \frac{e}{r_1^2}, \quad \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_{n_2} \overset{= -\mathfrak{F}_{r_2}}{=} 4\pi\omega_2 = -\frac{e}{r_2^2}$$

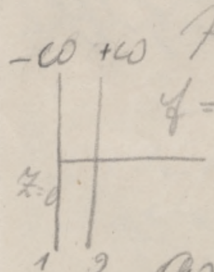
infolge Gauß allgemein $\int \mathfrak{F}_r \, df = \mathfrak{F}_r \, 4\pi r^2 = 4\pi e$

$$\mathfrak{F}_r = \frac{e}{r^2}, \quad \varphi = \text{konst} - \frac{e}{r}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2} = e\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

Als Kapazität K bezeichnet man $\frac{e}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = K$

$r_2 \gg r_1$, $K = r_1$

Plattenkondensator

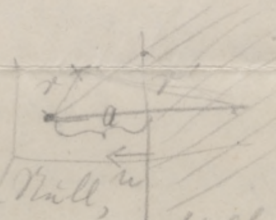


$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_z = \text{konst} = -4\pi\omega, \quad \mathfrak{F}_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \varphi = \text{konst} + 4\pi\omega z$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\omega(z_2 - z_1) = 4\pi\omega d$$

$\frac{\omega}{\varphi_2 - \varphi_1} = \frac{1}{4\pi d}$ Kapazität pro cm².

Influenz



Elektrische Bilder

$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r'}$, wird eben Null, weil $r = r'$. Im Isolator $\operatorname{div} \mathfrak{F} = -\Delta\varphi = 0$ (außer im Punkt selbst). $\mathfrak{F}_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -e\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + e\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n}$

Legen wir die x-Achse in Richtung n, und hat der ursprüngliche Punkt die Koord. $x_1 y_1 z_1$, der Bildpunkt $x_2 y_2 z_2$, so ist $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = +\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = +\frac{1}{r^2}\frac{x - x_1}{r}$, $\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial n} = +\frac{1}{r^3}(x - x_2)$

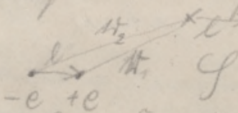
also $\mathfrak{F}_n = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{e}{r^3}(x_2 - x_1) = -\frac{2ae}{r^3}$, Nun ist $\mathfrak{F}_n = 4\pi\omega$

also $\omega = \frac{\mathfrak{F}_n}{4\pi} = -\frac{e}{2\pi}\frac{a}{r^3}$. Die gesamte Ladung der Ebene ist $\int \omega \, df = -\frac{e}{2\pi}\int \frac{a}{r^3} df$. Polarkoord. ρ, ϑ in Ebene $df = 2\pi\rho \, d\rho$; $r^2 = \rho^2 + a^2$, $\int \omega \, df = -e\int_{\rho=0}^{\rho=\infty} \frac{a\rho \, d\rho}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}$

$$= -\frac{e}{2}\int_0^\infty \frac{a \cdot d(\rho^2 + a^2)}{(a^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{e a}{2} \cdot -2(\rho^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{\rho=0}^{\infty} = e a \cdot -\frac{1}{a} = -e$$

10. Stunde

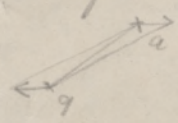
Dipol, Doppelschicht, Dielektrizitätskonstante

Dipol: 2 benachbarte Ladungen von entgegengesetztem Vorzeichen 

$\varphi = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2}$. Wir bezeichnen mit Buchstabe l den Fahrstrahl von $-e$ nach $+e$, und berechnen φ für $|r| \gg |l|$ folgendermaßen. φ von $+e$ ist $\frac{e}{r_1}$. Um φ für $-e$ zu finden, bedenken wir, daß $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} +$ [Änderung] des Skalars $\frac{1}{r_1}$, wenn der Aufpunkt um l verschoben wird, also gleich $l \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial l} = l \, \mathrm{grad}_l \frac{1}{r_1} = \left(l \, \mathrm{grad} \frac{1}{r_1}\right)$.

Also ist $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{r_1} + \left(l \, \mathrm{grad} \frac{1}{r_1}\right)$ und $\varphi = e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = -\left(el \, \nabla \frac{1}{r_1}\right)$
$= -\left(m \nabla \frac{1}{r}\right)$, wenn wir unter Moment Vektor el verstehen.

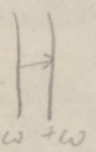
$\varphi = -\left(m \nabla \frac{1}{r}\right) = -\left(m_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + m_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + m_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right)$. Statt des Aufpunktes kann ich auch den Quellpunkt verschieben in entgegengesetzter Richtung; dasselbe für die Änderung von r, nur ist jeder nur von r abhängigen Größe [$\frac{\partial}{\partial} \frac{1}{r}$], den gleichen Effekt.



$\nabla_q \frac{1}{r} = -\nabla_a \frac{1}{r}, \; \varphi = \left(m \nabla_q \frac{1}{r}\right)$

Gilt annähernd, falls $|r| \gg l$, streng, falls ich mit l zur Grenze Null übergehe bei konst. $el = m$.

Doppelschicht: 2 parallele Flächen mit Dichte $-\omega$ und $+\omega$ aufgefaßt als Grenzfall räumlicher Dichte.



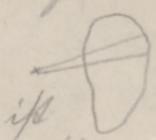
Abstand Vektor l von $-$ nach $+$. Potential von Flächenelement df herrührend in Abständen groß gegen l ist Potential eines Dipols mit Moment $el = \omega df l$. Die Richtung des Moments ist die der Normalen n auf den beiden parallelen Flächen und zwar von $-$ nach $+$. Setzen wir $\omega l = \tau$ und gehen mit l zur Grenze Null, wobei τ konstant bleiben soll, so ist τn das Moment der Flächeneinheit und $\varphi = -\int \left(\tau n, \nabla \frac{1}{r}\right) df$ das Potential der auf der Fläche f liegenden Doppelschicht. 7 Idealisierung. Diesen Ausdruck können wir in einfacher Weise umformen. (Liegt der Aufpunkt auf der pos. Seite von df, d.h. bilden r und n einen spitzen Winkel) so ist $-\left(\tau n, \nabla \frac{1}{r}\right) = -\tau \nabla_n \frac{1}{r} =$

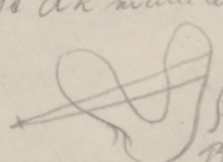
$= -\tau \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{\tau}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\tau}{r^2} \cos(r n) \quad = \tau n \left|\nabla \frac{1}{r}\right| \cos(r n)$

$= -\tau \cdot -\frac{1}{r^2} \cos(r n) = \frac{\tau}{r^2} \cos(r n)$. (Liegt ...) so ist $\cos(r n)$ pos. jedenfalls. Dann ist $\varphi df = -\left(\tau n, \nabla \frac{1}{r}\right) df = \tau \frac{df \cos(r n)}{r^2}$

Andererseits ist $\frac{df \cos(r n)}{r^2} = \pm dK$, dem körperlichen Winkel, unter dem df vom Aufpunkt aus gesehen erscheint. Es ist also $\varphi = \int \pm \tau \, dK$, wobei $+$ für die df, für die Aufpunkt auf pos. Seite liegt, $-$ negativ. Ist τ auf der ganzen Fläche konstant, so nennt man die Doppelschicht homogen, und es ist $\varphi = \tau \int \pm dK$. Ist die Doppelschicht geschlossen, so ist für einen außerhalb gelegenen Aufpunkt $\varphi = 0$, denn für jeden Elementarkegel dK ist dK einmal pos. u. einmal neg. zu nehmen.

Nur vom Randkurve abhängig.





Für einen inneren Punkt ist $\int \pm dK = \pm 4\pi$, je nachdem, ob die Innenseite pos. oder neg. ist, also $\varphi = \pm 4\pi\tau$.

Beim Durchgang durch die Fläche erleidet also das Potential einen Sprung vom Betrage $4\pi\tau$. Das gilt auch für eine ungeschlossene Doppelschicht. Denn denke ich sie mir zu einer geschlossenen ergänzt, so kann der ergänzende Teil für einen die ursprüngliche Fläche durchschreitenden Aufpunkt keine Unstetigkeit liefern. Feldstärke $\mathfrak{E}$ für geschlossene Doppelschicht innen und außen gleich Null, weil φ = konst. $\mathfrak{E}$ also stetig bei Durchgang durch geschlossene Doppelschicht (auf beiden Seiten, innen und außen, Null) also auch für ungeschlossene Doppelschicht stetig. Auch für $\mathfrak{E}$ nur Randkurve maßgebend wie für φ.

Im homogenen isotropen Dielektrikum $\mathfrak{K} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}\frac{\mathfrak{r}_{12}}{r_{12}}$. allgemeinen Feldstärke $\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{E}_0}{\varepsilon}$. Luft $\varepsilon = 1{,}00059$. Gilt: $\oint \mathfrak{E}_s ds = 0$, $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0$, $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} \varphi$. Für Punktladungen $\varphi = \frac{1}{\varepsilon}\sum \frac{e_i}{r_i}$. Gauß $\int \mathfrak{E}_n df = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi \sum e$. Führen neuen Vektor $\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E}$ ein. $\int \mathfrak{D}_n df = 4\pi \sum e$. Wollen unabhängig $\mathfrak{D}$ für sich definieren, da diese Definition auch für ~~inhomogene~~ anisotrope Medien gültig bleibt, wo $\mathfrak{D}$ lineare Vektorfunktion von $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{D}_x = \varepsilon_{11}\mathfrak{E}_x +$

$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho$, $\mathfrak{D}_{n_1} - \mathfrak{D}_{n_2} = 4\pi\omega$, $\mathfrak{D}_n = 4\pi\omega$.

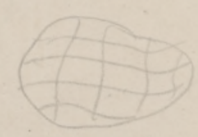
Werden Ladungen konstant erhalten, so wird $\mathfrak{D}$ durch Füllung mit Dielektrikum nicht geändert, dagegen $\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{D}}{\varepsilon}$ und dadurch φ auf $\frac{1}{\varepsilon}$ fache vermindert. Ist φ konst.: bleibt $\mathfrak{E}$ konst., also $\mathfrak{D}$ und Ladung ω ε fach vergrößert. Gilt nur falls ganzer Raum mit demselben homogenen Dielektrikum erfüllt, also keine Trennungsflächen von Dielektrika da sind. Kapazität auf ε fache vergrößert

$K = \frac{e}{\varphi_1 - \varphi_2}$ ε fach konst.

$\boxed{\text{11. Stunde}}$

Definition der Divergenz:

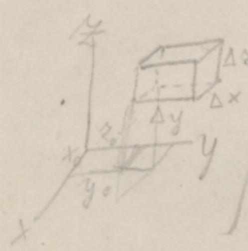
Geschlossene Fläche f umschließt Volumen v, n äußere Normale, bilden Oberflächenintegral $\int \mathfrak{F}_n df$, dann Definition $\operatorname{div} \mathfrak{F} = \lim\limits_{\Delta v = 0} \dfrac{\int \mathfrak{F}_n df}{\Delta v}$



Gaußscher Satz. Zerlegen endl. Volumen v in kleine Elemente Δv. Dann ist $\int \mathfrak{F}_n df = \sum \int_{\Delta v} \mathfrak{F}_n df$, weil die an inneren gelegenen Grenzflächen zwischen 2 Vol.elementen in $\sum$ je zweimal mit entgegengesetzten Vorzeichen vorkommen. Nun ist $\int_{\Delta v} \mathfrak{F}_n df$ $= \operatorname{div} \mathfrak{F} \Delta v$ also $\int_v \mathfrak{F}_n df = \sum \operatorname{div} \mathfrak{F} \Delta v = \int_v \operatorname{div} \mathfrak{F} dv$

$\operatorname{div} \mathfrak{F}$ in rechtw. Koord.

Wenden Definition auf rechtwinkl. Parall. $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ an



$$\mathfrak{F}_x = \mathfrak{F}_0^x + \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y}(y - y_0) + \dots$$

$$\int \mathfrak{F}_n df = \Big(\iint_{\Delta y \Delta z} \mathfrak{F}_x dy dz\Big)_{x_0 + \Delta x} - \Big(\iint \mathfrak{F}_x dy dz\Big)_{x_0} + \dots$$

$$= \mathfrak{F}_{x_0} \Delta y \Delta z + \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \iint_{\Delta y \Delta z} \Big[\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z}(z - z_0)\Big] dy dz \quad + \cdot +$$

$$- \mathfrak{F}_{x_0} \Delta y \Delta z \quad - 0 \qquad - \int$$

$$= \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = \lim_{\Delta v = 0} \frac{\int \mathfrak{F}_n df}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z}$$

$\operatorname{div} \mathfrak{F} = (\nabla \mathfrak{F})$ Skalares Produkt

Greenscher Satz:

$$\mathfrak{F} = \psi \mathfrak{A}, \quad \operatorname{div} \mathfrak{F} = \psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A}_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathfrak{A}_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathfrak{A}_z \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$= \psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \operatorname{grad} \psi$$

$$\nabla \mathfrak{F} = \nabla \psi \mathfrak{A} = \psi \nabla \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \nabla \psi$$

$$\int \psi \mathfrak{A}_n df = \int (\psi \operatorname{div} \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \operatorname{grad} \psi) dv$$

$$\mathfrak{A} = \operatorname{grad} \varphi$$

$$\int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = \int (\psi \Delta \varphi + \operatorname{grad} \varphi \operatorname{grad} \psi) dv \quad \text{Greenscher Satz}$$

$$\int \Big(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\Big) df = \int (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dv$$

$$\psi = 1, \quad \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} df = \int \Delta \varphi \, dv$$

Räuml. verteilte Ladg.

~~Ladungsdichte $\lim\limits_{\Delta v=0}\frac{\Delta e}{\Delta v}=\varrho$ Man kann also die Feldstärke im Aussenraum eines geladenen Körpers berechnen als $\mathfrak{f}=-\operatorname{grad}\varphi$, $\varphi=\int\varrho\frac{dv}{r}$~~

Gilt auch im Innern, Beweis nächste Stunde

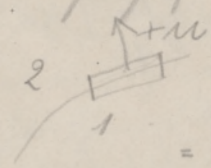
$$\varrho=\lim_{\Delta v=0}\frac{\Delta e}{\Delta v},\quad \int_{\Delta v}\mathfrak{f}_n\,df=4\pi\,\Delta e$$

$$4\pi\varrho=\lim_{\Delta v=0}\frac{\int_{\Delta v}\mathfrak{f}_n\,df}{\Delta v}=\operatorname{div}\mathfrak{f}$$

$\int 4\pi\varrho\,dv=\int\mathfrak{f}_n\,df=\int\operatorname{div}\mathfrak{f}\,dv$, $\operatorname{div}\mathfrak{f}=4\pi\varrho$

$\operatorname{div}\mathfrak{f}=0$ Spezialfall $\Delta\varphi=-4\pi\varrho$ Poisson

Flächendichte: $\omega=\lim\limits_{\Delta f=0}\frac{\Delta e}{\Delta f}$



$\int\mathfrak{f}_n\,df=4\pi\omega\,\Delta f$

$=\mathfrak{f}_{n_2}\Delta f-\mathfrak{f}_{n_1}\Delta f$, $\mathfrak{f}_{n_2}-\mathfrak{f}_{n_1}=4\pi\omega$

Flächendivergenz

$\oint_1^2\mathfrak{f}_s\,ds=\mathfrak{f}_{t_2}\Delta s-\mathfrak{f}_{t_1}\Delta s=0$

muss für beliebiges Δs gelten, also $\mathfrak{f}_{t_1}=\mathfrak{f}_{t_2}$

Tangentialkomp. stetig

Leiter d. Elektrizität beweglich, d.h. es findet Elektriz.bewegung statt, sobald $\mathfrak{f}$ in ihm endlich. Elektrostatik $\mathfrak{f}=0$ also auch $\varrho=0$ wegen $\operatorname{div}\mathfrak{f}=4\pi\varrho$. $\varphi=$ konst. wegen $\frac{\partial\varphi}{\partial s}=0$ für beliebige Richtung s. An Oberfläche $\mathfrak{f}_t=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$, d.h. Potential an Oberfläche konstant. Dagegen kann $\mathfrak{f}_n=-\frac{\partial\varphi}{\partial n}\neq 0$ sein. Wird der Fall sein, falls Ladg. an Oberfläche. $+n$ vom Leiterinnern nach Isolator. $\mathfrak{f}_n=4\pi\omega=-\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, $\mathfrak{f}_t=0$, $\mathfrak{f}=n\,4\pi\omega$

$\int\mathfrak{f}_s\,ds=0$, $\operatorname{rot}\mathfrak{f}=0$

$\int\mathfrak{f}_n\,df=\sum 4\pi e$, $\operatorname{div}\mathfrak{f}=4\pi\varrho=\Delta\varphi$

an Leiteroberflächen $\mathfrak{f}_n=4\pi\omega$

$\mathfrak{f}=-\operatorname{grad}\varphi$ ↘ $\mathfrak{f}=-n\frac{\partial\varphi}{\partial n}$

$\varphi=\int\frac{\varrho\,dv}{r}+\int\frac{\omega\,df}{r}$

rückwärts ω
Weil $\mathfrak{f}$ statt φ durch Differentialoperation ausgedrückt und ϱ und ω statt φ und $\mathfrak{f}$ notwendig berechenbar

8. Stunde

Punktladungen: $\mathfrak{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$; $\varphi = \sum \frac{e_i}{r_i}$

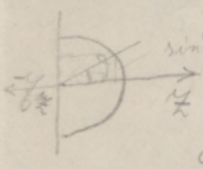
Stokes — Gauß

$\int \mathfrak{E}_s\,ds = 0$, $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0$, $\int \mathfrak{E}_n\,df = 4\pi\sum e_i$, $\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 0 = \Delta\varphi$ — Planck! (Drude?)

Räumliche Dichte (Punktladung Idealisierung wegen Coulomb)

Hypothese: Auch dann nach Coulomb berechenbar

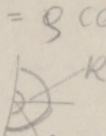
$\varphi = \int \frac{\rho\,dv}{r}$, $\mathfrak{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$. Rechtfertigung dieser Hypothese für äußere Punkte selbstverständlich. Anders bei Punkten im Innern. Hat dort Feldstärke Bedeutung noch Sinn, d.h. ist $\mathfrak{E}$ dort prinzipiell meßbar. [illegible]! Denken uns Volumen abgetrennt. Nicht mal nötig. Wegen Deformation davon Spannung u. Kraft, [illegible]. Was folgt aus unserer Hypothese? Bleiben $\mathfrak{E}$ u. φ endlich trotz $r = 0$. Um dies zu entscheiden schließen wir Körper durch Kugel um Punkt, in dem wir $\mathfrak{E}$ berechnen wollen. Außerhalb endlich. Also nur Kugel durch $\mathfrak{E}$ auf Mittelpunkt und ebenso φ aus Symmetriegründen Null. Ebenso $\mathfrak{E}$ und φ stetig, solange ρ stetig, sonst unterbrochen von Grenzflächen. Zunächst endlich.



$$dv = r\sin\vartheta\,d\varphi \cdot r\,d\vartheta\,dr = r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr$$

$$d\mathfrak{E} = \frac{\rho\,dv}{r^2} \qquad d\mathfrak{E}_z = -\frac{\rho\,dv}{r^2}\cos\vartheta = \rho\cos\vartheta\,d\cos\vartheta\,d\varphi\,dr$$

$$\mathfrak{E}_z = \rho\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\,d\cos\vartheta\int^{2\pi}d\varphi\int_r^R dr$$



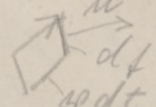
$\mathfrak{E}_z = -\frac{1}{2}\,2\pi(R-r) = \pi(R-r)$ konv. für $r = 0$ gegen πR für $R = 0$ gegen Null, d.h. $\mathfrak{E}$ auch an Grenzfläche endlich. Gilt auch für unstetigen Grenzflächen bei stetigen unendl. kleinen Stück eben, bei unstetigen Krümmung kleiner als bei ebenen bei Konkaven ebenfalls wegen Symmetrie.

$\mathfrak{E}$ bleibt auch stetig beim Durchgang durch die Grenzfläche. Denn schneiden wir wieder unsere Halbkugel heraus, so bleibt die vom übrigen Teil des Feldes herrührende $\mathfrak{E}$ sicher stetig, und der von der Halbkugel herrührende ist für $\lim R = 0$ stets Null sowohl innen als an der Grenzfläche. Das Gleiche läßt sich für φ zeigen, wo $\varphi = \int\frac{\rho\,dv}{r} = -\int d\cos\vartheta\int d\varphi\int r\,dr$ wird. Es ist also bei endlichem ρ sowohl φ wie $\mathfrak{E}$ überall auch an den Grenzflächen endlich und stetig. Dagegen nicht $\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = -\Delta\varphi$, Gaußscher Satz. Für beliebiges Volumen

$\int \mathfrak{E}_n\, df = 4\pi \int \rho\, dv = \int \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dv$, also $4\pi\rho = \operatorname{div} \mathfrak{E}$

Also räumlich: $\mathfrak{E} = \int \rho \frac{dv}{r}$, $\int \mathfrak{E}_n\, df = 4\pi \int \rho\, dv$, $\operatorname{div} \mathfrak{E} = -\Delta\varphi = 4\pi\rho$.

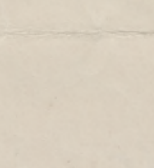
Hydrodynamische Analogie. Denken uns eine den Raum erfüllende inkompressible Flüssigkeit von überall gleicher Dichte k, die Geschwindigkeit w in jedem Punkte nach Richtung u. Größe prop. dem Vektor $\mathfrak{E}$, den wir durch die Strömung veranschaulichen wollen. Dann erhalten Sätze sehr anschauliche Bedeutung. Was ist z. B. $w_n\, df$?



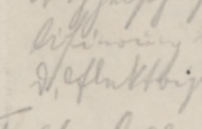
das pro Zeiteinheit durch df hindurchströmende Flüssigkeitsvolumen. Denn während dt strömen durch df alle Teilchen, die sich zu Beginn im Zylinder ... befanden. Sein Volumen ist $df\, w\, dt \cos(wn) = df\, w_n\, dt$. Also ist $\int w_n\, df$ das pro Zeiteinheit durchströmende Volumen und $k \int w_n\, df$ die Masse. Da Flüssigkeit weder entsteht noch verschwindet, muß $\int w_n\, df$ über eine geschlossene Fläche Null sein, also nach Gauß $\operatorname{div} w = 0$. [illegible] strömt ebenso viel ein wie aus. Wo Ladungen sind, müssen wir Quellen resp. Senken annehmen. Bezeichnen wir als Ergiebigkeit einer Quelle die pro Sek. entwickelte Flüssigkeitsmenge [illegible] gleich [illegible] der Dichte $\frac{1}{4\pi}$, so wird [illegible] eine Fläche, die $\sum e_i$ Ladungen umschließt, durchströmende Masse $\frac{1}{4\pi} \int w_n\, df = \sum e_i$. Ebenso wird für räumlich verteilte Quellen, wenn wir die Ergiebigkeit pro Volumeneinheit gleich ρ setzen, $\frac{1}{4\pi} \int w_n\, df = \int \rho\, dv$ also nach Gauß $\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} w = \rho$. $\int w_s\, ds$ anschaulich. Wirbelfreiheit Bedingung für Potentialströmung.

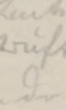
Nach dieser Abschweifung, flächenhafte Ladungen und Doppelschichten. In Wirklichkeit nur räumlich, aber Idealisierung bequem. Leiter solche Körper, in denen sich Ladung frei bewegt. Elektrostatisch also im Innern

Innenleitfähigkeit $\mathfrak{E} = 0$ $\varphi = \text{konst.}$ An der Oberfläche $\mathfrak{E}_t = 0 = -\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ in tangentialer Richtung, dagegen kann $\mathfrak{E}_n \neq 0$ sein. Dies wird der Fall sein, falls Leiter geladen. Zusammenhang zwischen $\mathfrak{E}_n$ und Flächendichte durch Grenzübergang von räumlicher Verteilung. [illegible] Normale vom Leiterinnern nach außen [illegible] Isolator [illegible] Übergangsschicht endlicher [illegible] räumlicher Dichte, wie in Wirklichkeit zutreffen wird.



Grenzen Zylinder mit Grundfläche df, [illegible] können





Auf Grundfläche im Leiter $\mathfrak{E}_n = 0$, $\mathfrak{E}_n\, df = 0$, auf anderer $\mathfrak{E}_n\, df$ endlich.

Dann gesamter Kraftfluß $\mathfrak{E}_n\, df = 4\pi\rho\, dv = 4\pi\, de$. Gehen zur Grenze über, indem wir Dicke d. Schicht immer kleiner werden lassen, aber ρ dabei wachsen, so daß $\rho\, dv = de$ konstant bleibt. Bezeichnen wir mit $\omega = \frac{de}{df}$ Flächendichte, so wird

$\mathfrak{E}_n = 4\pi\omega = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}$

$\boxed{\text{5 Stunden}}$

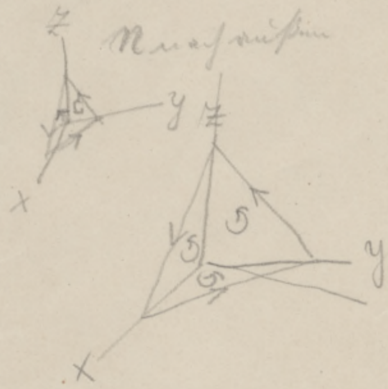
Stokesscher Satz.

Die Bedingung dafür, daß ein Vektor als Gradient eines Skalars darstellbar ist, hatten wir in 2 Formen geschrieben: wirbelfrei $\oint_C \mathfrak{f}_s \, ds = 0$, $\frac{\partial \mathfrak{f}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{f}_y}{\partial z} = 0, \frac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{f}_z}{\partial x} = 0, \frac{\partial \mathfrak{f}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{f}_x}{\partial y} = 0$

Wir wollen jetzt die zweite Bedingung ebenfalls vektoriell schreiben, indem wir zeigen, daß die obigen 3 Ausdrücke die Komp. eines Vektors Wirbel, Rotation, curl, rot $\mathfrak{f}$ sind. Wir definieren zunächst diesen Vektor, von dem wir nachher zeigen wollen, daß er die obigen Komp. hat, auf folgende Weise: Wir bilden für ein unendl. kleines ebenes Flächenstück df den Ausdruck $\oint \mathfrak{f}_s \, ds$ für die das Flächenstück umschlingende Kurve C. Die Normale n auf df zählen wir pos. in der Richtg, die dem Umlaufssinne in $\oint_C \mathfrak{f}_s ds$ zugeordnet wie Rechtsschraube. Dann soll die Komp. von rot $\mathfrak{f}$ in Richtg von n definiert sein durch $\mathrm{rot}_n \mathfrak{f} = \lim_{df=0} \frac{\oint_C \mathfrak{f}_s ds}{df}$.

Damit ist $\mathrm{rot}_n \mathfrak{f}$ für beliebige n, also rot $\mathfrak{f}$ selbst definiert. Wir müssen nun zunächst nachweisen, daß $\mathrm{rot}_n \mathfrak{f}$ wirklich die Komp. eines Vektors ist, d.h. daß die Komp. von rot $\mathfrak{f}$ in irgend einer Richtg sich aus den Komp. in 3 aufeinander ⊥ Richtg $x\,y\,z$ zusammensetzt nach der Formel $\mathrm{rot}_n \mathfrak{f} = \mathrm{rot}_x \mathfrak{f} \cos(nx) + \mathrm{rot}_y \mathfrak{f} \cos(ny) + \mathrm{rot}_z \mathfrak{f} \cos(nz)$

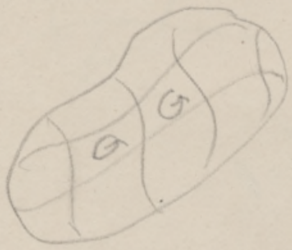
Dazu betrachten wir ein unendl. kleines Tetraeder, von dem 3 Seitenflächen den Koord. ebenen parallel sind, und dessen vierte Seitenfläche normal zu n ist. Hat letztere den Flächeninhalt df, so haben die drei andern $df_x = df \cos(nx)$, df_y [illegible], df_z [illegible]. Das $\oint_C \mathfrak{f}_s ds$ für df hat den Wert $\mathrm{rot}_n \mathfrak{f} \, df$, für die 3 andern die Werte $\mathrm{rot}_x \mathfrak{f} \, df_x, \mathrm{rot}_y \mathfrak{f} \, df_y, \mathrm{rot}_z \mathfrak{f} \, df_z$. Nun ist aber $\oint_C \mathfrak{f}_s ds$ für df gleich der Summe der $3 \oint \mathfrak{f}_s ds$ für die drei andern Flächen, denn die auf die Koord. achsen bezügl. Stücke heben sich weg. Also ist:



$$\mathrm{rot}_n \mathfrak{f} \, df = \mathrm{rot}_x \mathfrak{f} \, df_x + \mathrm{rot}_y \mathfrak{f} \, df_y + \mathrm{rot}_z \mathfrak{f} \, df_z$$
$$= \mathrm{rot}_x \mathfrak{f} \, df \cos(nx) + \mathrm{rot}_y \mathfrak{f} \, df \cos(ny) + \mathrm{rot}_z \mathfrak{f} \, df \cos(nz)$$
$$\mathrm{rot}_n \mathfrak{f} = \mathrm{rot}_x \mathfrak{f} \cos(nx) + \mathrm{rot}_y \mathfrak{f} \cos(ny) + \mathrm{rot}_z \mathfrak{f} \cos(nz)$$

wie zu beweisen, d.h. rot $\mathfrak{f}$ ist wirklich ein Vektor.

Stokesscher Satz: Wir bilden für eine endl. geschlossene Kurve das $\oint \mathfrak{f}_s ds$ und legen eine beliebige Fläche f, die

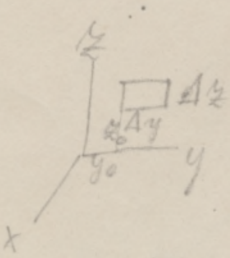


von unserer Kurve berandet wird, dann teilen wir die Fläche in kleine Flächenelemente df und bilden für jedes $\mathrm{rot}_n \mathfrak{F} = \frac{d\int \mathfrak{F}_s ds}{df}$, dann ist:

$$\int_{\odot f} \mathfrak{F}_s\, ds = \sum \int_{\odot df} \mathfrak{F}_s\, ds = \overbrace{\int_f \mathrm{rot}_x\, df}^{\sum \mathrm{rot}_x \mathfrak{F}\, df =},$$

denn die im Innern von f gelegenen Berandungskurven der df werden alle zweimal und zwar in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so dass in $\sum \int \mathfrak{F}_s ds$ nur die Integrale über die Linienelemente $\odot df$ der Berandungskurve von f übrig bleiben. Stokes'scher Satz.

Komp. von $\mathrm{rot}\,\mathfrak{F}$ in kartes. Koord.



Wir betrachten, um $\mathrm{rot}_x \mathfrak{F}$ zu finden, ein unendl. Parallelepiped in der yz Ebene mit den Seiten Δy, Δz Eckpunkt $y_0 z_0$. Dann ist:

$$\mathfrak{F}_y = \mathfrak{F}_{y_0 z_0} + \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z} \Delta z + \cdots$$

$$\mathfrak{F}_z = \mathfrak{F}_{y_0 z_0} + \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z} \Delta z + \cdots$$

also: $\int_{\odot} \mathfrak{F}_s ds$ über $df = \Delta y \Delta z$

$$= \cancel{\mathfrak{F}_{y_0 z_0} \Delta y} + \cancel{\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z} \frac{\Delta y^2}{2}} - \cancel{\mathfrak{F}_{y_0 z_0} \Delta y} - \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z} \Delta z \Delta y - \cancel{\frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} \frac{\Delta y^2}{2}}$$

$$\left(\text{weil } \int_0^{\Delta y} \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} (y-y_0)\, d(y-y_0) = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \frac{(y-y_0)^2}{2}\Big|_0^{\Delta y} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \frac{\Delta y^2}{2}\right)$$

$$+ \cancel{\mathfrak{F}_{y_0 z_0} \Delta z} + \cancel{\frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z} \frac{\Delta z^2}{2}} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} \Delta y \Delta z - \cancel{\mathfrak{F}_{y_0 z_0} \Delta z} - \cancel{\frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z} \frac{\Delta z^2}{2}}$$

$$\int_{\odot \Delta y \Delta z} \mathfrak{F}_s ds = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z}\right) \Delta y \Delta z$$

also $$\lim_{\Delta y \Delta z = 0} \frac{\int_{\odot} \mathfrak{F}_s ds}{\Delta y \Delta z} = \mathrm{rot}_x \mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial z}$$

und ebenso $\mathrm{rot}_y = \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial x}$, $\mathrm{rot}_z = \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial y}$

6. Stunde

$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, $\varphi = \sum \frac{e_i}{r_i}$, $\mathfrak{E} = \sum \frac{e_i}{r_i^2}\frac{\mathfrak{r}_i}{r_i}$

$\int_1^2 \mathfrak{E}_s\, ds = \varphi_1 - \varphi_2$, φ nur bestimmt bis auf Konstante, endlich nur außerhalb d. Punktladung

$\oint \mathfrak{E}_s\, ds = 0 = \int \mathrm{rot}_n\, df$, $\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = 0$

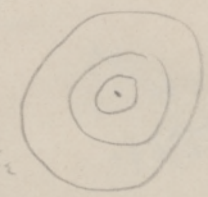
Mit Hilfe des Hamiltonschen Operators $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ können wir rot $\mathfrak{E}$ als Vektorprodukt schreiben:

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = i(\mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_z - \mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_y) + j(\mathfrak{A}_z\mathfrak{B}_x - \mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_z) + k(\mathfrak{A}_x\mathfrak{B}_y - \mathfrak{A}_y\mathfrak{B}_x)$$

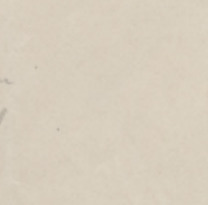
$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = [\nabla\mathfrak{E}] = i\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}\right)$$

Niveauflächen, Kraftlinien

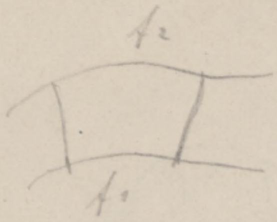
Anschauliche Darstellung. Wir legen durch alle Punkte φ = konst, für die also φ einen bestimmten Wert hat, eine Fläche, Niveaufl., und zeichnen solche Flächen für φ_0, $\varphi_0 + \Delta\varphi$, $\varphi_0 + 2\Delta\varphi$, ... Für eine einzelne Punktladung ist $\varphi = \frac{e}{r}$ d.h. die Niveaufl. φ = konst sind Kugeloberflächen. Allgemein komplizierter.



Aus diesem System von Niveauflächen läßt sich Richtung und Betrag von $\mathfrak{E}$ leicht ablesen. Die Richtung von $\mathfrak{E}$ steht $\perp$ auf Niv.fl. denn es ist $\mathfrak{E}_s = \frac{\partial\varphi}{\partial s}$. Liegt aber s in der Tangentialebene, so ist $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = 0$ d.h. $\mathfrak{E}$ darf keine Komp. tangential zur Niv.fl. haben d.h. $\mathfrak{E}$ steht $\perp$ darauf. Betrag: Wir bezeichnen mit Δn den Abstand zweier benachbarter Niveaufl. Dann ist $\mathfrak{E} = \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lim_{\Delta n = 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta n}$. Bei konstantem $\Delta\varphi$, wie wir es bei unserer Konstruktion angenommen haben, muß also $\mathfrak{E}$ umso größer sein, je kleiner der Abstand Δn d. benachb. Niv.fl. ist. Wir können nun Kurven ziehen, deren Tangente in jedem Punkt die Richtung von $\mathfrak{E}$ hat, Kraftlinien. Diese stehen $\perp$ Niv.fl., sie sind orthogonale Trajektorien des Systems d. Niv.flächen. Auch den Betrag von $\mathfrak{E}$ können wir veranschaulichen, indem wir festsetzen, daß die Zahl der pro Flächeneinheit die Niveaufl. durchsetzenden Kraftlinien gleich $|\mathfrak{E}|$ sein soll.

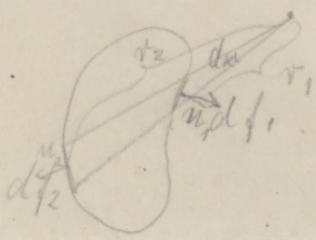


Diese Kraftlinien können wegen $\oint \mathfrak{E}_s\, ds = 0$ keine geschlossenen Linien sein, sondern müssen in den pos. Ladungen entspringen, in den neg. endigen. Daß auch im ladungsfreien Raum keine entspringen oder endigen können, wollen wir jetzt beweisen.



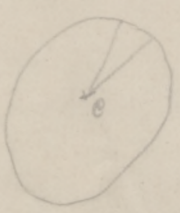
Wir grenzen nun auf einer Niveaufläche ein Flächenstück f_1 ab. Die durch die Randkurve von f_1 gehenden Kraftlinien werden dann auf der benachbarten Niv.fl. ein Stück f_2 ausschneiden. Wir müssen dann beweisen, daß die Zahl der f_1 und f_2 durchsetzenden Kraftlinien gleich ist. Wir haben festgesetzt, daß die Zahl der durch die Flächeneinheit gehenden Kraftlinien prop. $\mathfrak{F}$ sein soll. Indem wir d. Prop. faktor gleich 1 setzen, können wir diese Zahl gleich $\mathfrak{F}_n$ setzen, da $\mathfrak{F} \perp$ Niv. fl. Die Fläche des Flächenelements df durchsetzen also $\mathfrak{F}_n df$ und die Fläche f_1 durchsetzen $\int_{f_1} \mathfrak{F}_n df$ Kraftlinien. Zu beweisen $\int_{f_1} \mathfrak{F}_n df = \int_{f_2} \mathfrak{F}_n df$

Wir können nun den Satz einfacher formulieren, indem wir die von f_1, f_2 und den begrenzenden Kraftlinien gebildete geschlossene Fläche betrachten. Wir zählen nun die äußere Normale positiv, dann müssen wir im Integral über f_1 das Vorzeichen von $\mathfrak{F}_n$ umkehren und erhalten $-\int_{f_1} \mathfrak{F}_n df = \int_{f_2} \mathfrak{F}_n df$ oder $\int_{f_2} \mathfrak{F}_n df + \int_{f_1} \mathfrak{F}_n df = 0$, was wir auch schreiben können $\int \mathfrak{F}_n df = 0$ über die gesamte geschlossene Fläche, denn an der Wand $\mathfrak{F}_n = 0$ ist. Wir wollen nun ganz allgemein beweisen, daß für jede geschlossene Fläche, die keine Ladung einschließt, $\int \mathfrak{F}_n df = 0$ ist. Zunächst eine Ladung e.



$$df_1 = \frac{r_1^2\, d\kappa}{\cos(n_1 r_1)} \quad \mathfrak{F}_{n_1} = \frac{-e}{r_1^2}\cos(n_1 r_1), \quad \mathfrak{F}_{n_1} df_1 = -d\kappa \cdot e$$

$\mathfrak{F}_{n_2} df_2 = + d\kappa \cdot e$ d. h. die beiden Kraftflüsse heben sich gerade auf. $\int \mathfrak{F}_n df = 0$ für die ganze Oberfläche und beliebigen außerhalb liegenden Ladungen. Umschließt die betrachtete Fläche eine Ladung e, so ist der Kraftfluß durch das Flächenelement df, das durch $d\kappa$ herausgeschnitten wird, gleich $d\kappa\, e$, das Integral $\int \mathfrak{F}_n df$ über die gesamte Fläche gleich $4\pi e$ und sind mehrere Ladungen eingeschlossen, so ist $\int \mathfrak{F}_n df = 4\pi \sum_i e_i$.



Spezialfall $\sum e_i = 0$ in sich.

Den Gaußschen Satz können wir in differentieller Form aussprechen; wir wollen die betreffende diff. Gl. zunächst direkt aus dem Coulombschen Gesetz ableiten. Wir haben für eine Punktladung: $\mathfrak{F}_x = \frac{e_1}{r^3}(x - x_1)$, $\mathfrak{F}_y = \frac{e_1}{r^3}(y - y_1)$, $\mathfrak{F}_z = \frac{e_1}{r^3}(z - z_1)$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} = \frac{e_1}{r^3} - \frac{3(x-x_1)}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{e_1}{r^3}\left[1 - \frac{3(x-x_1)^2}{r^2}\right], \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} = \frac{e_1}{r^3}\left[1 - \frac{3(y-y_1)^2}{r^2}\right], \quad \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{F}_z}{\partial z} = 0 = \operatorname{div} \mathfrak{F} = -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) = -\Delta \varphi$$

Laplacescher Operator Δ

1 Stunde

Wie die [illegible] El. Statik ist Ihnen bekannt, daß Körper durch Reibung oder sonstwie in einen bestimmten Zustand bringen, in dem sie sich gegenseitig anziehen oder abstoßen. Wir sagen dann, d. Körper sind elektrisch geladen, und unterscheiden seit Dufay 1730 2 Arten von Elektr. + –. Ebenso ist Ihnen bekannt, daß es Leiter u. Nichtleiter d. Elektr. (Isolatoren) gibt, erstere Metalle, zweite Glas, Paraffin, Bernstein etc. Es ist Ihnen schließlich auch das Coulombsche Gesetz bekannt, wonach die Kraft zwischen 2 geladenen Körperchen [illegible] Verbindungslinie wirkt und umgekehrt proportional dem Quadrat d. Abstandes ist. Vorausgesetzt dabei daß [illegible] klein gegen Abstand

[illegible] etwas näher beschäftigen, indem wir etwas anders vorgehen als in der elementaren Darstellung üblich ist.

Wir nehmen irgend einen elektrisierten Körper A und untersuchen die Kraft, die er auf elektr. geladene Probekörperchen von gegen Abstand kleinen Dimensionen (bilden also idealisierend den Begriff elektr. geladener Punkt wie Massenpunkt) [illegible]. Dann wir festsetzen, daß unsere ganzen Kräfte [illegible] geschützt sind, wo sie als gleichzeitig wirkend [illegible] wollen aber [illegible] Größen und [illegible] Vorgang [illegible]. Dann finden wir, die Richtung der Kraft an jeder Stelle des Raumes ist immer dieselbe, gleich[gültig] welchen Probekörper wir verwenden. Sie hängt also nur von dem elektrisierten Körper A ab. Zweitens: Für 2 Probekörper an der gleichen Stelle ist stets das Verhältnis der Kräfte das gleiche, wohin wir sie auch bringen und unabhängig von Beschaffenheit u. Lage von A. Dieses Verhältnis hängt also nur von den Eigenschaften d. Probekörper ab. Dieses Verhalten gibt uns die Möglichkeit, den elektrischen Zustand eines Körpers zu messen, d. h. eine Vorschrift angeben, wie eine Zahl zu gewinnen, die diesem Zustand ~~[illegible]~~ zugeordnet wird. Wir greifen dazu [illegible] willkürlich einen auf einen bestimmten willkürlichen [illegible] elektrisierten Körper heraus. Wir sagen, dieser hat Ladung +1. An irgend einer Stelle wirke auf ihn die Kraft K_1 andere Größe. Wir nehmen nun irgend einen anderen Probekörper. Die Kraft die an der gleichen auf ihn wirkt, sei K. Das Verhältnis von $\frac{K}{K_1}$, das jetzt nur noch von dem zweiten Probekörper abhängt, da wir den ersten ein für alle mal festhalten, bezeichnen wir als die Ladung e desselben

In praxi gelten meine [illegible] schwierig [illegible] die gleiche Menge [illegible] Elektrizität [illegible] wenn diese Einheit [illegible] folgendermaßen fest. Man lädt 2 Kügelchen gleich stark, d.h. so, daß sie unter gleichen Umständen die gleiche Kraft erfahren, und wenn die beiden Kugeln sich abstoßen mit gleicher Kraft (Newtons Reaktionsprinzip) Ladung = 1, wenn sie sich im Abstand 1 cm mit der Kraft 1 dyn abstoßen. Messungen [illegible] d. Elektrizitätsmenge [illegible]† [illegible] Abstoßung, [illegible] von Einheiten [illegible] genau wie bei Länge, Masse, [illegible]

† Elektrostat. mit [illegible] gemessen, Elect. 7

Wichtigstes Gesetz [illegible] elektrostat. Vorgänge [illegible] gleichnamige + − El. (Watson, Franklin unabhängig 1747) [illegible] Es gibt Annahmen [illegible] dass [illegible] [illegible] in dem [illegible] [illegible] 1 Fluidum. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Elektronen.

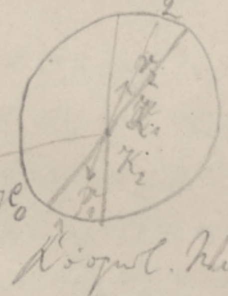
[illegible]

1785 Coulombsches Gesetz: $K = \frac{e_1 e_2}{r^2}$ [illegible] r^2. [illegible], dass die [illegible] idealisierten Punkt-Elementarquanten(?) gelten, und dass man bei Körpern endl. Körper in Volumenelemente zerlegen muss u. Wirkung [illegible] Richtiges Resultat

Durch unsere Festsetzung über Einheit der Ladung und Coulombsches Gesetz Dimension von e bestimmt.

$$[e]^2 = [K][l^2], \quad [K] = \left[\frac{m\,l}{t^2}\right], \quad [e] = \left[\frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}}}{t}\right] \text{ c.g.s}$$

Originelle Ableitung Priestley 1767 Cavendish 1771 unabhängig



Ladung e_0

Im Innern von metallischer Hohlkugel keine Kraft. Annahme: Ladung gleichmäßig verteilt, Zentralkraft

$K_1 = K_2$, Gesamtladung e, Dichte $\frac{e}{4\pi r^2} = \omega$

Körperl. Winkel $d\kappa$. Menge $\omega\, d\kappa\, r_1^2$ resp. $\omega\, d\kappa\, r_2^2$

K definitionsgemäß prop. der Ladung

$K_1 = K_2$ gibt $\frac{\omega\, d\kappa\, r_1^2}{f(r_1)} = \frac{\omega\, d\kappa\, r_2^2}{f(r_2)}$, $\frac{r^2}{f(r)}$ gleich für beliebige r d.h. konstant $f(r) = \text{konst}\, r^2$

2. Stunde

Lehrbücher: Abraham-Föppl Bd I b. Teubner Verlag
Drude, Physik d. Äthers bei Enke
Cl. Schaefer, Einführung in d. Maxwellsche Theorie Teubner
Encyklopädieartikel von H. A. Lorentz
R. Gans, Einführung i. d. Th. Sammlung wissenschaftl. Vorträge

---

Definition von e, Coulombsches Gesetz, Feldstärke

Vektoranalysis

Vektoren $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}-\mathfrak{B}$, Komp., Diff. quot. Einheitsvektor

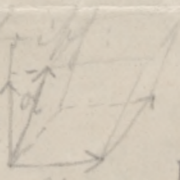
3. Stunde

Inneres und äußeres Produkt.
Produkte aus 3 Vektoren
$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) \neq (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$ weil erster Vektor Richt. $\mathfrak{A}$, zweiter $\mathfrak{C}$

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}] = A_x[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]_x + \dots = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$\mathfrak{B}[\mathfrak{C}\mathfrak{A}] \qquad \mathfrak{C}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$$

Geometrisch:
$[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$ $[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$



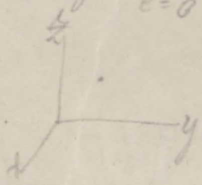
$\mathfrak{B}$

4. Stunde

$1 \xrightarrow{r_{12}} 2$ Kraft auf Punkt 2: $\mathfrak{K}_2 = \frac{e_1 e_2}{r_{12}^2}\frac{\mathfrak{r}_{12}}{r_{12}}$

Feldstärke $\mathfrak{E} = \lim\limits_{e=0} \frac{\mathfrak{K}}{e}$ für Punkt 1, Feld:

$\mathfrak{E} = e_1 \frac{\mathfrak{r}}{r^3}$.



$r = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$

Komp. $E_x = \frac{e_1}{r^3}(x-x_1)$, $E_y =$, $E_z =$
denn die Komp. von $\mathfrak{r}$ sind $r\cos(rx) = x-x_1, \dots$,
und die Komp. von $\alpha\mathfrak{A}$ sind $\alpha A_x, \alpha A_y, \alpha A_z$.
Nun ist $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2r}2(x-x_1) = \frac{x-x_1}{r}$ ferner $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3}(x-x_1)$
Also $E_x = -\frac{\partial \frac{e_1}{r}}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial \frac{e_1}{r}}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial \frac{e_1}{r}}{\partial z}$

$\frac{e_1}{r}$ Skalar. Man sagt dann, Kraft besitzt ein Potential, wenn sich ein skalarer Ausdruck $\varphi = \frac{e_1}{r}$ angeben läßt, derart die Komp. d. Kraft gleich dem negat. Diff. dieses Potentialskalars sind

[illegible]

Natürlich gilt für beliebige Richtung $\mathfrak{E}_s = -\frac{\partial \varphi}{\partial s}$

Denn es ist $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$

$\frac{\partial x}{\partial s} = \lim_{\Delta s = 0}\frac{\Delta x}{\Delta s}$

$\mathfrak{E}_s = \mathfrak{E}_x \cos(s x) + \mathfrak{E}_y \cos(s y) + \mathfrak{E}_z \cos(s z)$

Man kann aus jedem Skalar φ, der Ortsfunktion ist, einen Vektor ableiten, dessen Komp. $\mathfrak{A}_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ...

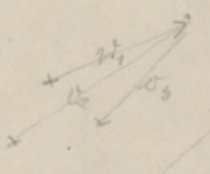
Man nennt diesen Vektor den Gradienten von φ [illegible]

$\mathfrak{A} = \text{grad}\,\varphi$ oder $\nabla\varphi$. Es ist [illegible] $\mathfrak{A} = i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + j\frac{\partial\varphi}{\partial y} + k\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

$\text{grad}\,\frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3}$

Nabla ∇ heißt Hamiltonscher Operator. $\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$

Haben wir mehrere geladene Punkte 1, 2, 3 ..., so ist



$\mathfrak{E} = \frac{e_1}{r_1^2}\frac{\mathfrak{r}_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2^2}\frac{\mathfrak{r}_2}{r_2} + \frac{e_3}{r_3^2}\frac{\mathfrak{r}_3}{r_3} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3$

$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_{1x} + \dots = -\left(\frac{\partial \frac{e_1}{r_1}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{e_2}{r_2}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{e_3}{r_3}}{\partial x}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ wobei jetzt

Wenn wir also ∇ als Vektor auffassen, so ist $\nabla\varphi = \text{grad}\,\varphi$ das Produkt des Vektors ∇ mit dem Skalar φ

$\varphi = \frac{e_1}{r_1} + \dots = \sum_i \frac{e_i}{r_i}$ $\quad \mathfrak{E} = -\text{grad}\,\varphi$

φ in engster Beziehung zur Arbeit, die von $\mathfrak{E}$ an 1 Ladung geleistet wird, wenn diese verschoben wird. Es ist nämlich

$\mathfrak{E}\,d\mathfrak{s} = \mathfrak{E}_s\,ds$ [illegible] Kraft mal Weg [illegible] Arbeit die von $\mathfrak{E}$ an d. 1 Ladung geleistet [illegible] wenn der Punkt frei beweglich ist, als kinet. Energie erscheinen wird. Bringt man d. 1 Ladung von d. Stelle 1 nach 2, so ist diese Arbeit $\int_1^2 \mathfrak{E}_s\,ds = -\int_1^2 \frac{\partial\varphi}{\partial s}\,ds = \varphi_1 - \varphi_2$ also unabhängig vom Wege, auf dem ich d. Ladung von 1 nach 2 bringe.

Für geschloss. Weg $\oint \mathfrak{E}_s\,ds = 0$. Wirbelfrei. Umgekehrt [illegible] läßt sich zeigen, daß wirbelfreies [illegible] $\oint \mathfrak{E}_s\,ds = 0$ muß Potential ableitbar, denn daraus

$\int_1^2 \mathfrak{E}_s\,ds = \varphi_1 - \varphi_2$ [illegible] Ortsfunktion sein, d. h. es muß, wenn ich zwei unendl. benachbarte Punkte betrachte,

$-d\varphi = \mathfrak{E}_s\,ds = \mathfrak{E}_x\,dx + \mathfrak{E}_y\,dy + \mathfrak{E}_z\,dz$ ein totales Differential sein, also $\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, ... d. h. $\mathfrak{E} = -\text{grad}\,\varphi$. Die Wirbelfreiheit $\oint \mathfrak{E}_s\,ds = 0$ ist also die notwendige u. hinreichende Bedingung dafür, daß ein Vektor als Gradient eines Potentials darstellbar ist. Wir können diese Bedingung auch in differentieller Form schreiben. Es muß ja, falls $\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, ... sein soll, $\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial y} = 0$ sein.

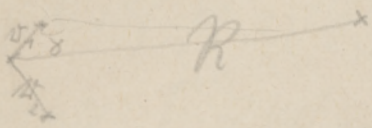
[illegible] diese 3 Ausdrücke als Komp. eines Vektors aufgefaßt werden können, den man als $\text{rot}\,\mathfrak{E}$ bezeichnet. $\text{rot}\,\mathfrak{E} = 0$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}}$ $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2$

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{2}{r}-\frac{r^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$ $r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2r}2x=\frac{x}{r}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{1}{r}+x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}$, $\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$, $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}$

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0$, $\varphi=a\ln r+b$, $\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{a}{r}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=-\frac{a}{r^2}$, $-\frac{a}{r^2}+\frac{a}{r^2}=0$



$\varphi=\sum\frac{e_i}{R_i}$, $\frac{1}{R_i}=\frac{1}{R}+r\,\mathrm{grad}\frac{1}{R}$.

$\varphi=\sum\frac{e_i}{R_i}=\frac{\sum e_i}{R}+\sum\left(\underbrace{e_i r_i}\,\mathrm{grad}\frac{1}{R}\right)$

$R_i=(R^2-2Rr_i\cos\gamma_i+r_i^2)^{\frac{1}{2}}$, $R_i^2=(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2+(z-\zeta_i)^2$

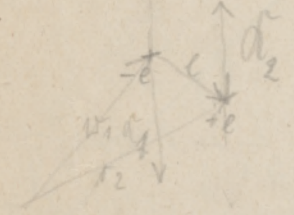
$\frac{1}{R_i}=\frac{1}{R}+\frac{r_i}{R^2}\cos\gamma_i+\frac{r_i^2}{R^3}\frac{1}{2}(3\cos^2\gamma-1)+\dots$

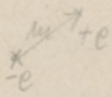
$\frac{1}{R_i}=\frac{1}{R}-\xi\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}-\eta\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}-\zeta\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}+\frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x^2}+\dots+\xi\eta\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x\partial y}+\dots$

$\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{R^2}\frac{x}{R}$, $\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x^2}=\frac{\partial\frac{-x}{R^3}}{\partial x}=\frac{1}{R^3}\left(-1+\frac{3x^2}{R^2}\right)$, $\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{R^5}$

$\varphi=\sum\frac{e_i}{R_i}=\frac{\sum e_i}{R}+\frac{1}{R^2}\left[\frac{x}{R}\sum e_i\xi_i+\dots\right]+\frac{1}{R^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{R^2}-1\right)\sum e_i\xi_i^2+\dots+\frac{3xy}{R^2}\sum e_i\xi_i\eta_i\right]$

$[r_1\,\mathfrak{d}_1]+[r_2\,\mathfrak{d}_2]=-e[r_2-r_1,\mathfrak{E}]=[el,\mathfrak{E}]=[m,\mathfrak{E}]$





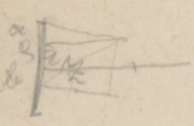
$A=|m|\frac{\partial\varphi}{\partial s}=(m,\mathrm{grad})\varphi$

$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\varphi'$, $\frac{d\varphi'}{dr}+\frac{\varphi'}{r}=0$, $\cancel{\frac{\partial\ln\varphi'}{\partial r}=\partial(\ln\frac{a}{r}),\ \text{konst},\ \varphi'=\frac{\text{konst}}{r}}$

$\frac{d\varphi'}{dr}=-\frac{\varphi'}{r}$, $\frac{d\varphi'}{\varphi'}=-\frac{dr}{r}$

Potential einer Kreisscheibendoppelschicht!

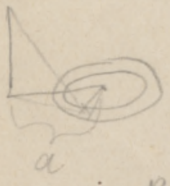
$\varphi = \int \tau \, d\kappa = \tau \int d\kappa \quad d\kappa = \frac{df \cos(r n)}{r^2}$



$df = \varrho \, d\varrho \, d\varphi$

$\cos(rn) = \frac{z}{r}, \; r =$

$\cos(rn) = \frac{z}{r}, \; df = \varrho \, d\varrho \, d\varphi, \; r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi + z^2$



$\varphi = \tau \, d\kappa = \tau \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\varrho \, d\varrho \, d\varphi \, z}{(a^2+z^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$

$\varphi = \tau z \int_0^R \varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a^2+z^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$

$dm = P \, dv \quad \varphi = \int -\left(P \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) dv, \; \varphi = \varphi_0 - \int \left(P \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) dv$

$\int (A L)_n \, df = \int \operatorname{div}(A L) \, dv = \int (A \operatorname{div} L + L \operatorname{grad} A) \, dv, \; L = P \;\; A = \frac{1}{r}$

$\int \frac{P_n}{r} df = \int \frac{\operatorname{div} P}{r} dv + \int P \operatorname{grad}\frac{1}{r} dv$

$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{\operatorname{div} P}{r} dv - \int \frac{P_n \, df}{r}, \; \varphi_0 = \int\frac{\varrho \, dv}{r} + \int \frac{\omega \, df}{r}, \; \varphi = \int \frac{(\operatorname{div} P + 4\pi\varrho) \, dv}{r} - \int \frac{(P_n - \omega) \, df}{r}$

$\varphi = \int \frac{\varrho' \, dv}{r} + \int \frac{\omega' \, df}{r}, \; \varrho' = \operatorname{div} P + 4\pi\varrho, \; \omega' = -P_n + \omega,$

$\cancel{4\pi\varrho} = \operatorname{div} E = \operatorname{div} P + 4\pi\varrho, \; 4\pi\varrho = \operatorname{div} D$

$\varphi = \varphi_0 + \int -\left(P \operatorname{grad}\frac{1}{r}\right) dv = \int \frac{\varrho \, dv}{r} + \int \frac{\omega \, df}{r} + \int \frac{\operatorname{div} P \, dv}{r} - \int \frac{P_n \, df}{r}$

$\varphi = \int \frac{(\varrho + \operatorname{div} P) \, dv}{r} + \int \frac{(\omega - P_n) \, df}{r}, \; \varrho' = \varrho + \operatorname{div} P, \; \omega' = \omega - P_n$

$\varrho' - \varrho = \operatorname{div} P \quad \varphi = \int \frac{\varrho' \, dv}{r} + \int \frac{\omega' \, df}{r} \quad \varrho' = \varrho - \operatorname{div} P, \; \omega' = \omega + P_n$

$\operatorname{div} E = 4\pi\varrho', \; \varrho = \varrho' + \operatorname{div} P, \; 4\pi\varrho = \operatorname{div} E + \operatorname{div} 4\pi P = \operatorname{div}(E + 4\pi P)$

$D = E + 4\pi P$, прим. $P \sim E$, $D = \varepsilon E = E + 4\pi P$,

$P = kE, \; D = (1 + 4\pi k) E = \varepsilon E$

1) Stromkreis mit Widerstand u. Selbstinduktion; Spannung konst.
2) " " " " : " periodisch
3) " Kapazität " " : " konst.
4) " " " " : " periodisch
5) Gekoppelte Systeme

---

1) $\mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^i = JR$, $\mathfrak{E} = JR + \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}$

$\frac{\mathfrak{E}}{R} = J + \frac{L}{Rc^2}\frac{dJ}{dt}$ genügen durch $x = J - \frac{\mathfrak{E}}{R}$, $\frac{dJ}{dt} = \frac{dx}{dt}$

$0 = x + \frac{L}{Rc^2}\frac{dx}{dt}$, $x = Ce^{kt}$, $\frac{dx}{dt} = kx$, $1 + \frac{L}{Rc^2}k = 0$

$k = -\frac{L}{Rc^2}$, $J = \frac{\mathfrak{E}}{R} + x = \frac{\mathfrak{E}}{R} + Ce^{-\frac{L}{Rc^2}t}$, für $t = 0$ sei $J = 0$, $k = -\frac{\mathfrak{E}}{R}$
$= -\frac{1}{\vartheta}$

$J = \frac{\mathfrak{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\vartheta}}\right)$, $\vartheta = \frac{L}{Rc^2}$, $[\vartheta] = \frac{cm}{cm^{-1} sec\,(cm\,sec^{-1})^2} = sec$

$L = 1$ Henry $= 10^9$, $R = 10$ Ohm $= \frac{10^{-9}}{900}$, $\vartheta = \frac{10^9 \cdot 900}{10^9 \cdot 9 \cdot 10^{20}} = 1\,sec$ dabei

---

2) $\mathfrak{E} = a\sin(\nu t)$, ν Zahl Schwingungen in 2π Sek.

$\mathfrak{E}$

$$E^i = \int \mathfrak{E}^i \, ds = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int \mathfrak{B}_n \, df = \int \mathfrak{A} \, ds$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu J}{c}\int \frac{ds}{r}, \quad \Phi = \frac{\mu J}{c}\iint \frac{ds_1 \, ds_2}{r_{12}} = \frac{1}{c} L_{12} J_1$$

$T = \frac{1}{2c}\int (i\,\mathfrak{A})\,dv$, wir setz. $i = J j;\ J\int j\,df = J,\ \mathfrak{A} = \frac{\mu J}{c}\int \frac{j}{r}\,ds$

$$T = \frac{1}{2c}\int (j\,ds)\int \quad = \frac{\mu J^2}{2c}$$

$$T = \frac{1}{2c^2} L J^2$$

$$\Phi_{11} = \int \mathfrak{A}_1 \, ds_1$$

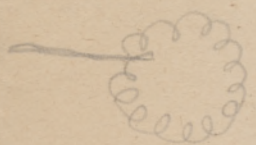
$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial J_1}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{\partial T}{\partial J_2}\frac{dJ_2}{dt}$, früher $2T = J_1 \frac{\partial T}{\partial J_1} + J_2 \frac{\partial T}{\partial J_2}$

$$2\frac{dT}{dt} = \frac{dJ_1}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_1} + \frac{dJ_2}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_2} + J_1 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_1} + J_2 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_2}$$

$$\frac{dT}{dt} = J_1 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_1} + J_2 \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_2}\,!$$

Selbstinduktion geschl. Spule n Windungen, Länge l, Querschnitt q,

Kraftlinien geschlossen Kreise im Innern



$$|\mathfrak{H}|\,l = \frac{4\pi n J}{c}, \quad |\mathfrak{H}| = \frac{4\pi n J}{c\,l}, \quad |\mathfrak{B}| = \mu\frac{4\pi n J}{c\,l}$$

$$T = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\,dv = \frac{\mu}{8\pi}\int \mathfrak{H}^2\,dv = \frac{\mu\mathfrak{H}^2}{8\pi}\int dv = \frac{\mu\mathfrak{H}^2}{8\pi}\,q\,l$$

$$T = \frac{\mu q l}{8\pi}\,\frac{16\pi^2 n^2 J^2}{c^2 l^2} = \frac{1}{2c^2}\,\frac{\mu q}{l}\,4\pi n^2 J^2 = \frac{1}{2c^2} L J^2$$

$$L = \frac{4\pi\mu q n^2}{l}$$

$$\cancel{\mathfrak{A}\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{H}}{c}\frac{[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]}{r^3} = \frac{1}{c}\frac{[i\,dv, \mathfrak{r}]}{r^3}} \qquad \mathfrak{A}' = -\mathfrak{A}$$

$$\mathfrak{A}' = -\frac{1}{c}\frac{[i\,dv, \mathfrak{r}]}{r^3}, \quad \cancel{\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\frac{-\mathfrak{r}}{r^3}, \frac{\mathfrak{r}}{r^3}} = -\mu\mathfrak{H} = -\mathfrak{B}$$

$$\cancel{\mathfrak{A}' = \left[\frac{\mathfrak{i}}{c}\,\mathfrak{B}\right]} dv$$

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{H}(\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\,\mu\,\mathfrak{H}^2\right\} df$$

$$\eta\,\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int\left\{\operatorname{div}\{(\eta\,\mathfrak{H})\mu\,\mathfrak{H}\} + \mathfrak{H}\operatorname{grad}(\eta\,\mu\,\mathfrak{H})\right\} dv$$

$$\operatorname{div}(\eta\,\mathfrak{H})\,\mathfrak{H} = \mu\mathfrak{H}\operatorname{grad}(\eta\,\mathfrak{H}) + \cancel{\eta\,\mathfrak{H}\operatorname{div}\mathfrak{H}}$$

$$\eta\,\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi}\int 2\mu\,\mathfrak{H}\operatorname{grad}(\eta\,\mathfrak{H})\,dv \qquad \operatorname{grad}(\eta\,\mathfrak{H}) = (\eta\operatorname{grad})\mathfrak{H} + [\eta\operatorname{rot}\mathfrak{H}]$$

$$2\mu\mathfrak{H}\operatorname{grad}(\eta\,\mathfrak{H}) = \eta\operatorname{grad}\mu\,\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{H}[\eta\operatorname{rot}\mathfrak{H}]$$
$$= -\eta[\mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{H}]$$

Magnet. Energie, ponderomot. Kräfte
Volumend
Induktionsbegriff, Zugkraft
Energiesatz, Maßeinheit.

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}}e^{i\gamma} = \frac{n}{\mu} - i\frac{\kappa}{\mu} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}}\cos\gamma + i\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}}\sin\gamma$$

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}}\cos\gamma = \frac{n}{\mu}, \quad \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}}\sin\gamma = \frac{\kappa}{\mu}$$

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}} = \frac{\sqrt{n^2+\kappa^2}}{\mu} = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon^2+4\sigma^2\tau^2}{\mu^2}}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\kappa}{n},$$

$$(a+bi)e^{i\nu t} = (\cos\nu t + i\sin\nu t)(a+bi)$$
$$= a\cos\nu t - b\sin\nu t + ia\sin\nu t + ib\cos\nu t$$

$$A\sin(\nu t+\delta) = A\cos\delta\sin\nu t + A\sin\delta\cos\nu t$$

$$\mathfrak{H}_y = a\,e^{i\nu t}\ \cancel{\mathfrak{E}\cos(\nu t+\delta)} = \mathfrak{E}\,e^{i(\nu t+\delta)}$$
$$\mathfrak{E}\cos(\nu t+\delta)$$

$$\mathfrak{H}_y = \mathfrak{E}\cos(\nu t+\delta)$$
$$a = \mathfrak{E}\,e^{i\delta} \qquad e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$
$$= e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos\alpha\cos\beta - s$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta$$

$$n^2 = \frac{\mu}{2}\left\{2\sigma\tau\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2\tau^2}} + \varepsilon\right\}$$
$$= \frac{\mu}{2}\left\{2\sigma\tau\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2\tau^2} + \frac{\varepsilon}{2\sigma\tau}\right)\right.$$
$$= \sigma\tau\,(1$$

$$\mathfrak{K} = \int df\left\{2\mathfrak{H}(\mu\mathfrak{H}, \mathfrak{n}) - \mathfrak{n}\,\mu\,\mathfrak{H}^2\right\}$$

$$\mathfrak{K}\eta = \frac{1}{4\pi}\int dv\left\{\operatorname{div}\left[(\eta\,\mathfrak{H})\mu\,\mathfrak{H}\right] - \frac{1}{2}\operatorname{div}(\eta\,\mu\,\mathfrak{H}^2)\right\}$$

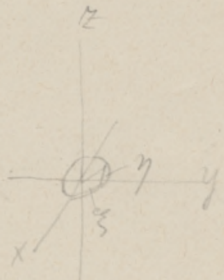
$$\operatorname{div}\left[(\eta\,\mathfrak{H})\mathfrak{B}\right] = \mathfrak{B}\operatorname{grad}(\eta\,\mathfrak{H}) = \mathfrak{B}(\eta\operatorname{grad})\mathfrak{H} + \mathfrak{B}[\eta\operatorname{rot}\mathfrak{H}]$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{div}\eta\,\mu\,\mathfrak{H}^2$$

$$\cancel{\left[\mathfrak{M}, \nabla_q \frac{1}{r}\right] = \frac{\mathrm{rot}\,\mathfrak{M}}{r}}$$

$$\cancel{\left[\mathfrak{M}, \nabla_q \frac{1}{r}\right]_x = \mathfrak{M}_\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \mathfrak{M}_\eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = \mathfrak{M}_\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{M}_\eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \frac{\mathfrak{M}_z}{r}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{\mathfrak{M}_y}{r}}{\partial x}\right) = \mathrm{rot}_\xi \frac{\mathfrak{M}}{r}}$$

$$\cancel{\mathrm{rot}_\xi \frac{\mathfrak{M}}{r} = \frac{\mathrm{rot}_\xi \mathfrak{M}}{r}} +$$

$$\left[\mathfrak{M}, \nabla_q \frac{1}{r}\right] = \frac{\mathrm{rot}_q \mathfrak{M}}{r} - \mathrm{rot}_q \frac{\mathfrak{M}}{r}$$



$$\mathfrak{H} = \frac{J}{c}\int \frac{[d\sigma\, r]}{r^3} = -\frac{J}{c}\int \left[d\sigma, \mathrm{grad}\,\frac{1}{r}\right]$$

$$\mathfrak{A} = \frac{J}{c}\int \frac{d\sigma}{r}, \quad \mathfrak{A}_x = \frac{J}{c}\int \frac{d\xi}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \varrho_0^2, \quad \eta = \sqrt{\varrho_0^2 - \xi^2}, \quad \mathfrak{A}_x = \frac{J}{c}\int$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = x^2 - 2\xi x + \xi^2 + y^2 - 2\eta y + \eta^2 + z^2 - 2z\zeta + \zeta^2$$

$$= r_0^2 + \varrho_0^2 - 2(r_0 \varrho_0), \quad r = r_0\sqrt{1 - 2\frac{(r_0 \varrho_0)}{r_0^2}} = r_0 - \frac{(r_0 \varrho_0)}{r_0}$$

$$R = R_0 - (r\, \mathrm{grad}_{R_0} R), \quad \mathrm{grad}_{R_0} R = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{(x-\xi)^2 +}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{x-\xi}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \xi\left(\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x}\right)_{R_0} + \dots = \frac{1}{R_0} - \frac{\xi x}{R_0^3} - \frac{\eta y}{R_0^3} - \frac{\zeta z}{R_0^3}, \quad \zeta = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 = \varrho_0^2$$

$$\mathfrak{A}_x = \frac{J}{c}\int \frac{d\xi}{R} = \frac{J}{c}\int \frac{d\xi}{R_0} - \frac{Jx}{cR_0}\int \xi\, d\xi - \frac{Jy}{cR_0^3}\int \underbrace{\sqrt{\varrho_0^2 - \xi^2}\, d\xi}_{\pi \varrho_0^2}$$

$$\mathfrak{A}_x = -\frac{Jy\pi\varrho_0^2}{cR_0^3}, \quad \mathfrak{A}_y = -\frac{J}{c}\frac{x\pi\varrho_0^2}{R^3}, \quad \mathfrak{A}_z = 0$$

$$\mathfrak{H}_x = \mathrm{rot}_x \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} = \frac{J\pi\varrho_0^2}{c}\frac{3xz}{R_0^5}, \quad \mathfrak{H}_y = \frac{J\pi\varrho_0^2}{c}\frac{3yz}{R_0^5}, \quad \mathfrak{H}_z = -\frac{J}{}$$

$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{R_0^3} - \frac{3\xi x}{R_0^5} - \frac{3\eta y}{R_0^5} - \frac{3\zeta z}{R_0^5}$$

$$\cancel{\mathfrak{H}_x = \frac{J}{c}\int\left(d\eta \cdot \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} - d\zeta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y}\right) = \frac{J}{c}\int}$$

$$\varphi = (\mathfrak{m}\, \mathrm{grad}\, \frac{1}{R_0}) = -\mathfrak{m}_z \frac{\partial \frac{1}{R_0}}{\partial z} = +\mathfrak{m}_z \frac{z}{R_0^3} \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\mathfrak{m}_z\left(\frac{R_0^2}{R_0^5} - \frac{3z^2}{R_0^5}\right)$$

$$\mathfrak{H}_x = +\frac{J}{c}\int \frac{z\, d\eta}{R^3} = \frac{Jz}{c}\int \frac{d\eta}{R^3} = \frac{Jz}{c}\frac{3x\, \pi\varrho_0^2}{R_0^5}$$

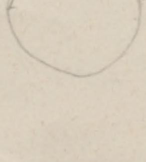
$$-\frac{J}{c}\int \frac{y\, d\xi}{R^3} + -\frac{Jy}{c}\int \frac{d\xi}{R^3}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{konst}$$

$$\xi\, d\xi + \eta\, d\eta = 0$$

$$\eta\, d\xi + \frac{\eta^2}{\xi}\, d\eta = 0$$

$$\int \eta\, d\xi =$$



$\varphi = -\int(\mathfrak{P}\,dv, \operatorname{grad}\frac{1}{r})$ $\mathfrak{P}$ konstant Richtg z Achse

$\varphi = -|\mathfrak{P}|\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dv$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2+\cdots}$ $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{1}{r^2}\frac{z}{r} = -\frac{z}{r^3}$

$\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dv = \frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}dv$, $\varphi = -(\mathfrak{P}\operatorname{grad}\int\frac{dv}{r})$ $R = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\psi = \int\frac{dv}{r}$ außen gleich $\frac{4\pi}{3}a^3\frac{1}{R}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{4\pi a^3}{3}\frac{z}{R^3}$; $\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}|\mathfrak{P}|\frac{z}{R^3}$

$\varphi = -\frac{4\pi a^3}{3}(\mathfrak{P}\operatorname{grad}\frac{1}{R}) = \frac{4\pi a^3}{3R^3}(\mathfrak{R}\mathfrak{P}) = |\mathfrak{M}|\frac{z}{R^3} = -\frac{4\pi a^3}{3}|\mathfrak{P}|\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} = -(\mathfrak{M}\operatorname{grad}\frac{1}{R})$

innen $\psi = \frac{4\pi}{3}$

$\mathfrak{E}_a = \frac{4\pi a^3}{3}\frac{1}{R^2} = \frac{4\pi a^3}{3}\frac{\mathfrak{R}}{R^3}$ $\mathfrak{E}_i = \frac{4\pi R^3}{3}\frac{\mathfrak{R}}{R^3} = \frac{4\pi}{3}\mathfrak{R}$

$\varphi = -(\mathfrak{P}\operatorname{grad}\int\frac{dv}{r}) = +\frac{4\pi}{3}(\mathfrak{P}\mathfrak{R})$

$\mathfrak{E}_P = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$ $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0+\mathfrak{E}_P = \mathfrak{E}_0-\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}_0-\frac{4\pi}{3}\kappa\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}(1+\frac{4\pi\kappa}{3})$

$\mathfrak{E}_a = \cancel{4\pi a^3}|\mathfrak{M}|\frac{z}{R^3}$, $\mathfrak{E}_i =$ $\mathfrak{P} = \kappa\mathfrak{E} = \frac{3\kappa}{3+4\pi\kappa}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\frac{3}{3+4\pi\kappa} = \frac{3}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}(\frac{3+4\pi\kappa}{3})$

$\mathfrak{D} = \mathfrak{E}+4\pi\mathfrak{P} = (1+4\pi\kappa)\mathfrak{E} = \varepsilon\mathfrak{E} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E} = \frac{3}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{P} = \kappa\mathfrak{E} = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon-1}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}_0$

Außen $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0+\mathfrak{E}_P = \mathfrak{E}_0-\operatorname{grad}\varphi = \mathfrak{E}_0-|\mathfrak{M}|\operatorname{grad}\frac{z}{R^3}$, $\mathfrak{M} = \frac{4\pi a^3}{3}\mathfrak{P} = a^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0$

$\cancel{\operatorname{grad}\frac{z}{R^3} = \frac{1}{R^3}\operatorname{grad}z + z\operatorname{grad}\frac{1}{R^3}}$ Grenzbedingungen an der Oberfläche:

$\mathfrak{E}_{t_1} = \mathfrak{E}_{t_2}$ d.h. $\mathfrak{E}$ stetig. $\mathfrak{D}_{n_1} = \mathfrak{D}_{n_2}$ Im Innern $\mathfrak{D} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{D}_r = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0\cos\vartheta$

außen $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\cos\vartheta+|\mathfrak{M}|\operatorname{grad}_R\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} = (\mathfrak{E}_0+\frac{2\mathfrak{M}}{R^3})\cos\vartheta$

$\cancel{|\mathfrak{M}|}\frac{\partial}{\partial R}(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial R} = \frac{\partial -R^{-2}}{\partial z} = +2R^{-3}\frac{z}{R} = \frac{2z}{R^4} = \frac{2\cos\vartheta}{R^3}$

$\mathfrak{D}_{r=a} = \mathfrak{E}_0(1+\frac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2})\cos\vartheta = \mathfrak{E}_0\frac{\varepsilon+2+2\varepsilon-2}{\varepsilon+2}\cos\vartheta = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0\cos\vartheta$

$\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} = -\frac{1}{R^2}\frac{z}{R} = -\frac{z}{R^3}$ $\frac{\partial -z\cdot R^{-3}}{\partial R} = +\frac{3z}{R^4}$, $\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial R} = -\frac{1}{R^2}$, $\frac{\partial R^{-2}}{\partial z} = \frac{2}{R^3}\frac{z}{R}$

$-\frac{1}{R^3}\frac{\partial z}{\partial R}$ $\cancel{z = \sqrt{R^2-x^2-y^2} \quad \frac{\partial z}{\partial R} = \frac{2R}{2z} = \frac{R}{z}}$

$\frac{\partial -\frac{z}{R^3}}{\partial x} = \frac{3zx}{R^5}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{3zy}{R^5}$ $\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{R^3}+\frac{3z^2}{R^5}$

$\frac{\partial -\frac{z}{R^3}}{\partial R} = \frac{3zx^2}{R^6}+\frac{3zy^2}{R^6}+\frac{3zz^2}{R^6}-\frac{1}{R^3}\frac{z}{R} = \frac{3z}{R^4}-\frac{z}{R^4} = \frac{2z}{R^4}$

$$\int df\{2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{u}) - \mathfrak{u}\mathfrak{E}^2\} = \int dv\{2\mathfrak{E}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}\}$$

$$\int dv\{2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}\} = \int df\{2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})(\mathfrak{E}\mathfrak{u}) - (\mathfrak{u}\mathfrak{v})\mathfrak{E}^2\}$$

$$\mathrm{div}\,2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\mathfrak{E} = 2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} + 2\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})$$

$$\mathrm{grad}_x(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = \left(\mathfrak{v}_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + \mathfrak{v}_y\frac{\partial E_y}{\partial x} + \mathfrak{v}_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \mathfrak{v}_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + \mathfrak{v}_z\frac{\partial E_x}{\partial z} - \mathfrak{v}_y\frac{\partial E_x}{\partial y} - \mathfrak{v}_z\frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$= \mathfrak{v}_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + \mathfrak{v}_y\frac{\partial E_x}{\partial y} + \mathfrak{v}_z\frac{\partial E_x}{\partial z} + \mathfrak{v}_y\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) - \mathfrak{v}_z\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)$$

$$= (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,E_x) + \mathfrak{v}_y\,\mathrm{rot}_z\mathfrak{E} - \mathfrak{v}_z\,\mathrm{rot}_y\mathfrak{E} = (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,E_x) + \cancel{[\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}]_x}$$

$$\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\mathfrak{E} = i(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,E_x) + j(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,E_y) + k(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,E_z)$$

$$2\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = 2E_x(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,E_x) + 2E_y(\quad) + 2E_z(\quad) = (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,E_x^2) + (\quad) + (\quad)$$

$$2E_x(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,E_x) = \mathfrak{v}_x 2E_x\frac{\partial E_x}{\partial x} + \mathfrak{v}_y 2E_x\frac{\partial E_x}{\partial y} + \mathfrak{v}_z 2E_x\frac{\partial E_x}{\partial z} = (\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,E_x^2)$$

weil $\mathfrak{v}$ konst.

$$2\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = \mathfrak{v}_x\left(\frac{\partial E_x^2}{\partial x} + \frac{\partial E_y^2}{\partial x} + \frac{\partial E_z^2}{\partial x}\right) + \mathfrak{v}_y(\quad) + \mathfrak{v}_z(\quad) = \mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}^2 = \mathrm{div}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}^2)$$

$$2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = \mathrm{div}\,2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\mathfrak{E} - 2\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}) = \mathrm{div}\{2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\mathfrak{E} - \mathfrak{v}\mathfrak{E}^2\}$$

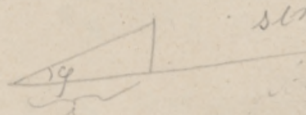
$$\cancel{\int\rho\,dv\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial s}} \quad \mathrm{div}\,\mathfrak{D} = 4\pi\rho = \mathrm{div}\,\varepsilon\mathfrak{E} = \varepsilon\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon$$

$$\mathfrak{T}\quad \mathfrak{T}_1 = 2\mathfrak{E}(E_x u_x + E_y u_y + E_z u_z) - \mathfrak{u}(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2)$$

$$T_x = (2E_x^2 - \mathfrak{E}^2)u_x + 2E_xE_y u_y + 2E_xE_z u_z$$

$$\mathrm{grad}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,B_x) + (\mathfrak{B}\,\mathrm{grad}\,A_x) + [\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]_x + [\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]_x$$

$$\mathfrak{E} = \frac{\varepsilon}{c}\int\frac{[d\mathfrak{s}, \mathfrak{v}]}{r^3} \qquad \mathfrak{E} = \int\frac{\sin\varphi\,ds}{r^2}$$



$\sin\varphi = \frac{r_0}{r}$ $\cos\varphi = \frac{s}{r}$

$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{r_0}{s}$, $s = r_0\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$

$ds = r_0\frac{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{r_0\,d\varphi}{\sin^2\varphi}$

$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2\varphi}{r_0^2}$, $\frac{ds}{r^2} = r_0\,d\varphi$

$$\mathfrak{H} = \frac{J}{c}\int \frac{[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]}{r^3}, \quad |\mathfrak{H}| = \frac{J}{c}\int \frac{ds \sin(d\mathfrak{s}, \mathfrak{r})}{r^2}$$

$$\frac{[d\mathfrak{s}\,\mathfrak{r}]}{r^3} = \left[d\mathfrak{s}\,\frac{\mathfrak{r}}{r^3}\right] = -\left[d\mathfrak{s}\,\mathrm{grad}_a \frac{1}{r}\right] = \left[d\mathfrak{s}\,\mathrm{grad}_q \frac{1}{r}\right]$$

$$\mathrm{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]$$

$$dy\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - dz\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}$$

Allgemein gilt $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} i$, $\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0$, [illegible] ferner [illegible] $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$

$\mathfrak{B} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$ für μ konst folgt $\mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0$, sonst $\mathrm{div}\,\mathfrak{H} =$

$\mathrm{div}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}\right) = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}\,\mathrm{div}\frac{1}{\mu} = 4\pi\varrho_m'$. Immer ist $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} i =$

$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}\right)$ für μ konst folgt $\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = -\frac{1}{\mu}\Delta\mathfrak{A} = \frac{4\pi}{c} i$

also $\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c}\int\frac{i\,dv}{r}$, sonst $\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} + \mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\cdot\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = \frac{4\pi}{c} i$

$= -\frac{1}{\mu}\Delta\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\frac{1}{\mu} = -\frac{1}{\mu}\Delta\mathfrak{A}_0$; $\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\Delta$

$$\varphi = \int\left(\tau\mathfrak{n}, \mathrm{grad}_q\frac{1}{r}\right)df, \quad \mathfrak{H} = -\mathrm{grad}\,\varphi, \quad \mathfrak{H}_x =$$

$$\cancel{\varphi = \int\tau\left(\mathfrak{n}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\right)}$$

$$\varphi = -\int\left(\tau\mathfrak{n}, \mathrm{grad}\frac{1}{r}\right)df = -\int\tau\left(\mathfrak{n}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} + \cdot\right)df$$

$$\mathfrak{H}_x = \cancel{-\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \int\tau\left(\mathfrak{n}_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} + \mathfrak{n}_y\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial y} + \mathfrak{n}_z\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x\partial z}\right)df$$

$$-\mathfrak{n}_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial x^2} - \mathfrak{n}_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial y^2} - \mathfrak{n}_x\frac{\partial^2\frac{1}{r}}{\partial z^2}$$

$$\mathfrak{H}_x = \int\tau\left\{\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(\mathfrak{n}_y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x} - \mathfrak{n}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\right)}_{[\mathrm{grad}\frac{1}{r}, \mathfrak{n}]_z} - \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\left(\mathfrak{n}_x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \mathfrak{n}_z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\right)}_{[\mathrm{grad}\frac{1}{r}, \mathfrak{n}]_y}\right\}df$$

$$= \tau\,\mathrm{rot}_x\int\left[\mathrm{grad}\frac{1}{r}, \mathfrak{n}\right]df$$

$$\mathfrak{H} = \tau\,\mathrm{rot}\int\left[\mathrm{grad}\frac{1}{r}, \mathfrak{n}\right]df, \quad \mathfrak{A} = \tau\int\left[\mathrm{grad}\frac{1}{r}, \mathfrak{n}\right]df$$

$$\mathfrak{A}_\eta = \tau\int\eta\left[\nabla\frac{1}{r}, \mathfrak{n}\right]df = \tau\int\mathfrak{n}\left[\eta, \mathrm{grad}\frac{1}{r}\right]df = \tau\int\left[\eta, \mathrm{grad}\frac{1}{r}\right]_n df \;\cancel{= \tau\int[\eta, \mathrm{grad}\tfrac{1}{r}]\,d\mathfrak{s}}$$

$$\left[\eta\,\mathrm{grad}\frac{1}{r}\right]_x = \eta_y\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} - \eta_z\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y} = \frac{\partial\frac{\eta_y}{r}}{\partial z} - \frac{\partial\frac{\eta_z}{r}}{\partial y} = \mathrm{rot}_x\frac{\eta}{r}, \quad \mathfrak{A}_\eta = \tau\int\mathrm{rot}_n\frac{\eta}{r}\,df = \tau\int\frac{\eta}{r}\,d\mathfrak{s}$$

$U = \frac{1}{2}\int \varphi \varrho \, dv + \frac{1}{2}\int \varphi \omega \, df$, $4\pi\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{D}$, $4\pi\omega = \mathfrak{D}_n$

$U = \frac{1}{8\pi}\int \varphi \operatorname{div}\mathfrak{D} \, dv + \frac{1}{8\pi}\int \varphi \mathfrak{D}_n \, df$

$\int \varphi \mathfrak{D}_n \, df = \int \operatorname{div}(\varphi\mathfrak{D}) \, dv = \int \varphi \operatorname{div}\mathfrak{D} \, dv + \int \mathfrak{D} \operatorname{grad}\varphi \, dv$

$U = \frac{1}{8\pi}\int \varphi \operatorname{div}\mathfrak{D} \, dv \mp \frac{1}{8\pi}\int \cancel{\varphi \operatorname{div}\mathfrak{D}} \, dv + \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{D}\mathfrak{E} \, dv$

$\operatorname{div}\mathfrak{D} = 4\pi\varrho$, $\mathfrak{D}_n = 4\pi\omega$, $\mathfrak{D} = \varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad}\varphi$

$\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}'$, $\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}'$, $\varphi = \varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$

$\operatorname{div}\mathfrak{D}' = 0$, $\mathfrak{D}'_n = 0$, $\cancel{\mathfrak{E}' = 0}$ ~~div~~ $U = \frac{1}{2}\int \varphi \varrho' \, dv + \frac{1}{2}\int \varphi \eta' \, df = 0$

$U = \frac{1}{2}\int \varphi \omega \, df = \frac{1}{2}\varphi e$, $\mathfrak{K} = -\frac{\partial U}{\partial r} =$

$4\pi r^2 \mathfrak{F}_r \, \delta r = -\delta U = -\frac{\partial U}{\partial r}\delta r = -\frac{e}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = +\frac{e}{2}\mathfrak{E}_r$, $e = \omega 4\pi r^2$

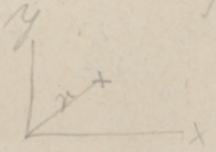
$\mathfrak{F}_r = \frac{1}{2}\omega \mathfrak{E}_r$

$U = \frac{1}{2}\omega(\varphi_1 - \varphi_2)$, $K = \frac{\omega}{\varphi_1 - \varphi_2}$, $U = \frac{K}{2}(\varphi_1 - \varphi_2)^2$, $K = \frac{\varepsilon}{4\pi d}$, $U = \frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{d}$

$\delta U = -\mathfrak{K}\,\delta d$, $\mathfrak{K} = -\frac{\partial U}{\partial d} = +\frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{d^2} = +\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2$

$i = \sigma \mathfrak{E}$

$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $r e^{i\varphi} = r\cos\varphi + i r \sin\varphi$

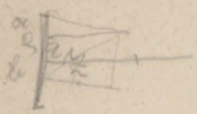


$r e^{i\varphi} = x + iy$,

$a = |a| e^{i\delta} = |a|\cos\delta + i|a|\sin\delta = (\mu - n) + i\kappa$, $|a|\cos\delta = (\mu - n)$, $a \sin\delta = \kappa$

$|a|^2 = (\mu - n)^2 + \kappa^2$, $|a|\cos\delta = (\mu + n)$, $|a|\sin\delta = -\kappa$, $|a|^2 = (\mu + n)^2 + \kappa^2$

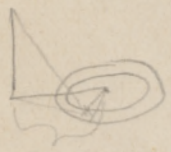
$\varphi = \int \tau\, d\kappa = \tau \int d\kappa \quad d\kappa = \frac{df \cos(r\, n)}{r^2}$



$df = \varrho\, d\varrho\, d\varphi$

$\cos(r\, n) = \frac{z}{r},\ r =$

$\cos(r\, n) = \frac{z}{r},\ df = \varrho\, d\varrho\, d\varphi,\ r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho\cos\varphi + z^2$



a

$$\varphi = \tau\, d\kappa = \tau \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \frac{\varrho\, d\varrho\, d\varphi\, z}{(a^2+z^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varphi = \tau z \int_0^R \varrho\, d\varrho \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a^2+z^2+\varrho^2-2a\varrho\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

$dm = K\, dv \quad \varphi = \int -(K \operatorname{grad}\frac{1}{r})\, dv,\ \varphi = \varphi_0 - \int (K \operatorname{grad}\frac{1}{r})\, dv$

$\int (A Z)_n\, df = \int \operatorname{div}(A Z)\, dv = \int (A \operatorname{div} Z + Z \operatorname{grad} A)\, dv,\ Z = K\ \ A = \frac{1}{r}$

$\int \frac{K_n}{r} df = \int \frac{\operatorname{div} K}{r} dv + \int K \operatorname{grad}\frac{1}{r}\, dv$

$\varphi = \varphi_0 + \int \frac{\operatorname{div} K}{r} dv - \int \frac{K_n\, df}{r},\ \varphi_0 = \int\frac{\varrho\, dv}{r} + \int \frac{\omega\, df}{r},\ \varphi = \int \frac{(\operatorname{div} K + 4\pi\varrho)\, dv}{r} - \int \frac{(K_n - \omega)\, df}{r}$

$\varphi = \int \frac{\varrho'\, dv}{r} + \int \frac{\omega'\, df}{r},\ \varrho' = \operatorname{div} K + \overset{4\pi}{\varrho},\ \omega' = -K_n + \omega,$

$\cancel{4\pi\varrho} = \operatorname{div} E = \operatorname{div} K + 4\pi\varrho,\ 4\pi\varrho = \operatorname{div} D$

$\varphi = \varphi_0 + \int -(K \operatorname{grad}\frac{1}{r})\, dv = \int\frac{\varrho\, dv}{r} + \int\frac{\omega\, df}{r} + \int\frac{\operatorname{div} K\, dv}{r} - \int\frac{K_n\, df}{r}$

$\varphi = \int\frac{(\varrho + \operatorname{div} K)\, dv}{r} + \int\frac{(\omega - K_n)\, df}{r},\ \varrho' = \varrho + \operatorname{div} K,\ \omega' = \omega - K_n$

$\varrho' - \varrho = \operatorname{div} K \quad \varphi = \int\frac{\varrho'\, dv}{r} + \int\frac{\omega'\, df}{r} \quad \varrho' = \varrho - \operatorname{div} K,\ \omega' = \omega + K_n$

$\operatorname{div} E = 4\pi\varrho',\ \varrho = \varrho' + \operatorname{div} K,\ 4\pi\varrho = \operatorname{div} E + \operatorname{div} 4\pi K = \operatorname{div}(E + 4\pi K)$

$D = E + 4\pi K$, при. $K \sim E$, $D = \varepsilon E = E + 4\pi K,$

$K = \kappa E,\ D = (1 + 4\pi\kappa) E = \varepsilon E$

$$\mathfrak{K} = \int dv\, \rho\, \mathfrak{E}, \quad 4\pi\rho = \operatorname{div} \varepsilon\mathfrak{E} = \varepsilon \operatorname{div}\mathfrak{E}$$

$$8\pi\mathfrak{K} = \varepsilon\int dv\, 2\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E}, \quad \operatorname{div}\mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial y}$$

$$\cancel{\operatorname{grad}_x\mathfrak{E}^2 = \frac{\partial \mathfrak{E}^2}{\partial x} = \frac{\partial(\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2)}{\partial x} = 2\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x} + 2\mathfrak{E}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} + 2\mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial z} = A}$$

$$\cancel{\mathfrak{A}\operatorname{div}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\operatorname{div}\mathfrak{A} - (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + \operatorname{rot}[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]}$$

$$\cancel{\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E}} =$$

$$8\pi\mathfrak{K}_\eta = \varepsilon\int dv\, 2(\mathfrak{E}\eta)\operatorname{div}\mathfrak{E}, \quad 2(\mathfrak{E}\eta) = \psi, \quad \operatorname{div}\psi\mathfrak{E} = \psi\operatorname{div}\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\nabla\psi$$

$$2(\mathfrak{E}\eta)\operatorname{div}\mathfrak{E} = \operatorname{div}\{2(\mathfrak{E}\eta)\mathfrak{E}\} - 2\mathfrak{E}\nabla(\eta\mathfrak{E}), \quad \cancel{\operatorname{grad}} = \operatorname{div}\{2(\eta\mathfrak{E})\mathfrak{E} - \mathfrak{E}^2\eta\}$$

$$2\mathfrak{E}\nabla(\eta\mathfrak{E}) = (\eta\nabla)\mathfrak{E}^2 \cancel{- 2\eta[\mathfrak{E}\operatorname{curl}\mathfrak{E}]} = \operatorname{div}\eta\mathfrak{E}^2$$

$$\int dv\left\{2\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E}\right\} = \int df\left\{2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}n) - n\mathfrak{E}^2\right\}$$

$$\cancel{(\mathfrak{E}\eta)}\operatorname{div}\mathfrak{E}(\eta\mathfrak{E}) = (\eta\mathfrak{E})\operatorname{div}\mathfrak{E} + \mathfrak{E}\operatorname{grad}(\eta\mathfrak{E})$$

$$\operatorname{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}\operatorname{curl}\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{A}]$$

$\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{K} = \int dv\,\rho\,\mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi}\int dv\,\mathfrak{E}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}, \quad \int\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E}\,dv$$

$$\operatorname{grad}\mathfrak{E}^2 = i\frac{\partial\mathfrak{E}^2}{\partial x} + \cdot + \cdot = i\left(2\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x} + 2\mathfrak{E}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} + 2\mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right) + j(\ ) + k(\ )$$

$$= i\left[2\mathfrak{E}_x\operatorname{div}\mathfrak{E} - 2\mathfrak{E}_x\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial z}\right) + 2\mathfrak{E}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x} + 2\mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right]$$

$$+ j\left[2\mathfrak{E}_y\operatorname{div}\mathfrak{E} - 2\mathfrak{E}_y\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial z}\right) + 2\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y} + 2\mathfrak{E}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial y}\right]$$

Kräfte geladener Punkte Eigenschaften des Feldes

$$\mathfrak{E} = \sum \frac{e_i}{r_i^2}\frac{\mathfrak{r}_i}{r_i} \qquad 1\times\mathfrak{r}_1 \quad 2+\mathfrak{r}_2+\mathfrak{r}_3 \qquad \text{davon}\quad e\frac{\mathfrak{r}}{r^3} \quad r=\sqrt{(x_a-x_q)^2+(y_a-y_q)^2+(z_a-z_q)^2}$$

$$\mathfrak{E}_x = e\frac{x_a-x_q}{r^3} \quad \mathfrak{E}_y = \quad \mathfrak{E}_z$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_a} = \frac{1}{2}\frac{2(x_a-x_q)}{r} = \frac{x_a-x_q}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_q}, \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x_a} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_a} = \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x_q}$$

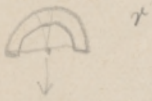
$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial\left(\frac{e}{r}\right)}{\partial x_a}, \qquad \mathfrak{E} = -\mathrm{grad}_a\frac{e}{r} = \mathrm{grad}_q\left(\frac{e}{r}\right) = -\mathrm{grad}_a\varphi, \quad \varphi = \sum\frac{e_i}{r_i}$$

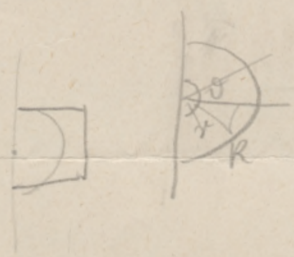
$$\mathfrak{E}_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \mathfrak{E}_s = -\frac{\partial\varphi}{\partial s} \quad \mathfrak{E}_s = \mathfrak{E}_x\cos(sx) + \cdot + \cdot = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \cdot \quad \cdot\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

$$\varphi = \int\frac{\varrho\, dv}{r} \quad \int\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\right)df = \int\left(\frac{1}{r}\Delta\varphi - \varphi\Delta\frac{1}{r}\right)dv$$

$$\mathfrak{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$$

$$r\sin\vartheta\, d\varphi\, r\, d\vartheta\, dr = r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr = dv$$





$$d\mathfrak{E} = \frac{\varrho\, dv}{r^2} \quad d\mathfrak{E}_n = -d\mathfrak{E}\cos\vartheta \quad \mathfrak{E}_n = \iiint_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\vartheta\, d\cos\vartheta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_r^R dr$$

$$\pi(R-r)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \varphi = \varphi(r), \quad x = r\cos\omega, \; y = r\sin\omega$$

$$\partial_1$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \cancel{\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \cancel{\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\quad\right)\frac{\partial r}{\partial\omega}}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial r} + \partial} \quad \cancel{+\frac{\partial\varphi}{\partial\omega^2}\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\omega} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\omega} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\omega}$$

$$= -r\sin\omega\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\omega\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} \qquad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \qquad \frac{\partial^2}{\partial\omega^2} = -r\sin\omega\left(-r\sin\omega\frac{\partial^2}{\partial x^2} + r\cos\omega\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x}\right)$$

$$+r\cos\omega\left(\right.$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\omega + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\omega$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \cos\omega\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos\omega + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\sin\omega\right) + \sin\omega\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\sin\omega + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cos\omega\right)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cos^2\omega + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x\,\partial y}\sin\omega\cos\omega + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\sin^2\omega$$

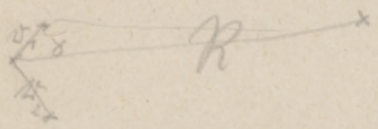
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\omega^2} =$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\cancel{\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}}\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{2}{r}-\frac{r^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{2r}2x=\frac{x}{r},\ \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{1}{r}+x\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3},\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\ \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,\ \varphi=a\ln r+b,\ \frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{a}{r},\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=-\frac{a}{r^2},\ -\frac{a}{r^2}+\frac{a}{r^2}=0$$



$$\varphi=\sum\frac{e_i}{R_i},\ \frac{1}{R_i}=\frac{1}{R}+r\,\mathrm{grad}\frac{1}{R}$$

$$\varphi=\sum\frac{e_i}{R_i}=\frac{\sum e_i}{R}+\sum\left(e_i r_i\,\mathrm{grad}\frac{1}{R}\right)$$

$$R_i=\left(R^2-2Rr_i\cos\gamma_i+r_i^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad R_i^2=(x-\xi_i)^2+(y-\eta_i)^2+(z-\zeta_i)^2$$

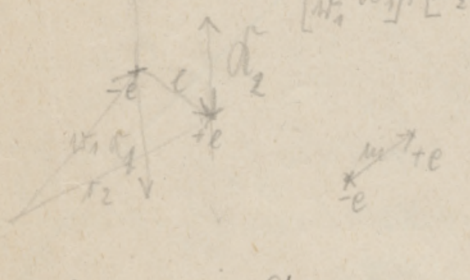
$$\frac{1}{R_i}=\frac{1}{R}+\frac{r_i}{R^2}\cos\gamma_i+\frac{r_i^2}{R^3}\frac{1}{2}(3\cos^2\gamma-1)+\dots$$

$$\frac{1}{R_i}=\frac{1}{R}-\xi\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}-\eta\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y}-\zeta\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}+\frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x^2}+\dots+\xi\eta\frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x\partial y}+\dots$$

$$\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x}=-\frac{1}{R^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{R^2}\frac{x}{R},\ \frac{\partial^2\frac{1}{R}}{\partial x^2}=\frac{\partial\frac{-x}{R^3}}{\partial x}=\frac{1}{R^3}\left(-1+\frac{3x^2}{R^2}\right),\ \frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x\partial y}=\frac{3xy}{R^5}$$

$$\varphi=\sum\frac{e_i}{R_i}=\frac{\sum e_i}{R}+\frac{1}{R^2}\left[\frac{x}{R}\sum e_i\xi_i+\dots\right]+\frac{1}{R^3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3x^2}{R^2}-1\right)\sum e_i\xi_i^2+\dots+\frac{3xy}{R^2}\sum e_i\xi_i\eta_i\right.$$

$$[r_1\,\mathfrak{A}_1]+[r_2\,\mathfrak{A}_2]=e\,[r_2-r_1,\mathfrak{E}]=[el,\mathfrak{E}]=[m,\mathfrak{E}]$$



$$A=m\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial s}=(m,\mathrm{grad})\,\mathfrak{E}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\varphi',\ \frac{d\varphi'}{dr}+\frac{\varphi'}{r}=0,\ \cancel{\frac{d\ln\varphi'}{dr}=0,\ \ln\varphi' r=\text{konst},\ \varphi'=\frac{\text{konst}}{r}}$$

$$\frac{d\varphi'}{dr}=-\frac{\varphi'}{r},\ \frac{d\varphi'}{\varphi'}=-\frac{dr}{r}$$

Potential einer Kreisscheibendoppelschicht!

$U=\frac{1}{2}\int\varphi\varrho\,dv+\frac{1}{2}\int\varphi\omega\,df$, $4\pi\varrho=\mathrm{div}\,\mathfrak{D}$, $4\pi\omega=\mathfrak{D}_n$

$U=\frac{1}{8\pi}\int\varphi\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D}\,dv+\frac{1}{8\pi}\int\varphi\,\mathfrak{D}_n\,df$

$\int\varphi\mathfrak{D}_n\,df=\int\mathrm{div}(\varphi\mathfrak{D})\,dv=\int\varphi\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D}\,dv+\int\mathfrak{D}\,\mathrm{grad}\,\varphi\,dv$

$U=\frac{1}{8\pi}\int\varphi\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D}\,dv\mp\frac{1}{8\pi}\cancel{\int\varphi\,\mathrm{div}\,\mathfrak{D}\,dv}+\frac{1}{8\pi}\int\mathfrak{D}\mathfrak{E}\,dv$

$\mathrm{div}\,\mathfrak{D}=4\pi\varrho$, $\mathfrak{D}_n=4\pi\omega$, $\mathfrak{D}=\varepsilon\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi$

$\mathfrak{D}_1-\mathfrak{D}_2=\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{E}_1-\mathfrak{E}_2=\mathfrak{E}'$, $\varphi=\varphi'=\varphi_1-\varphi_2$

$\mathrm{div}\,\mathfrak{D}'=0$, $\mathfrak{D}_n'=0$, $\cancel{\mathfrak{E}'=0}$ ~~div~~ $U=\frac{1}{2}\int\varphi\varrho'\,dv+\frac{1}{2}\int\varphi\eta'\,df=0$

$U=\frac{1}{2}\int\varphi\omega\,df=\frac{1}{2}\varphi e$, $\mathfrak{K}=-\frac{\partial U}{\partial r}=$

$4\pi r^2\mathfrak{K}_r\,\delta r=-\delta U=-\frac{\partial U}{\partial r}\delta r=-\frac{e}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=+\frac{e}{2}\mathfrak{E}_r$, $e=\omega 4\pi r^2$

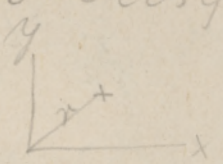
$\mathfrak{K}_r=\frac{1}{2}\omega\mathfrak{E}_r$

$U=\frac{1}{2}\omega(\varphi_1-\varphi_2)$, $K=\frac{\omega}{\varphi_1-\varphi_2}$, $U=\frac{K}{2}(\varphi_1-\varphi_2)^2$, $K=\frac{\varepsilon}{4\pi d}$, $U=\frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{d}$

$\delta U=-\mathfrak{K}\,\delta d$, $\mathfrak{K}=-\frac{\partial U}{\partial d}=+\frac{\varepsilon}{8\pi}\frac{(\varphi_1-\varphi_2)^2}{d^2}=+\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2$

$i=\sigma\mathfrak{E}$

$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $re^{i\varphi}=r\cos\varphi+ir\sin\varphi$



$re^{i\varphi}=x+iy$,

$a=|a|e^{i\delta}=|a|\cos\delta+i|a|\sin\delta=(\mu-n)+i\kappa$, $|a|\cos\delta=(\mu-n)$, $a\sin\delta=\kappa$

$|a|^2=(\mu-n)^2+\kappa^2$, $|a|\cos\delta=(\mu+n)$, $|a|\sin\delta=-\kappa$, $|a|^2=(\mu+n)^2+\kappa^2$

$$\mathfrak{H} = \frac{J}{c}\int \frac{[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]}{r^3}, \quad |\mathfrak{H}| = \frac{J}{c}\int \frac{ds \sin(d\mathfrak{s}, \mathfrak{r})}{r^2}$$

$$\frac{[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]}{r^3} = \left[d\mathfrak{s}\, \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\right] = -\left[d\mathfrak{s}\, \mathrm{grad}_a \frac{1}{r}\right] = \left[d\mathfrak{s}\, \mathrm{grad}_q \frac{1}{r}\right]$$

$$\mathrm{grad}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} + (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} + [\mathfrak{A}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{B}] + [\mathfrak{B}, \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]$$

$$dy \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - dz \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}$$

Allgemein gilt $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} i$, $\mathrm{div}\,\mathfrak{B} = 0$, beim Ausschließen fremder eigentl. $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$

$\mathfrak{B} = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$ für μ konst folgt $\mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0$, sonst $\mathrm{div}\,\mathfrak{H} =$

$\mathrm{div}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}\right) = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}\; \mathrm{div}\frac{1}{\mu} = 4\pi\rho_m'$. Ferner ist $\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} i =$

$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}\right)$ für μ konst folgt $\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = -\frac{1}{\mu}\Delta\mathfrak{A} = \frac{4\pi}{c} i$

also $\mathfrak{A} = \frac{\mu}{c}\int \frac{i\, d\sigma}{r}$, sonst $\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} + \mathrm{rot}\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} = \frac{4\pi}{c} i$

$= -\frac{1}{\mu}\Delta\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\frac{1}{\mu} = -\frac{1}{\mu}\Delta\mathfrak{A}_0$; $\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\Delta$

$\varphi = \int\left(\tau u, \mathrm{grad}_q \frac{1}{r}\right) df$, $\mathfrak{H} = -\mathrm{grad}\,\varphi$, $\mathfrak{H}_x =$

$\cancel{\varphi = \int \tau\left(u_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\right.}$

$$\varphi = -\int\left(\tau u, \mathrm{grad}\frac{1}{r}\right) df = -\int \tau\left(u_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \ldots\right) df$$

$$\mathfrak{H}_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \int \tau\left(u_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + u_y \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} + u_z \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}\right) df$$

$$- u_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} - u_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - u_x \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}$$

$$\mathfrak{H}_x = \int \tau \left\{ \frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\left(u_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - u_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right)}_{[\mathrm{grad}\frac{1}{r}, u]_z} - \frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\left(u_x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - u_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right)}_{[\mathrm{grad}\frac{1}{r}, u]_y} \right\} df$$

$$= \tau\, \mathrm{rot}_x \int \left[\mathrm{grad}\frac{1}{r}, u\right] df$$

$$\mathfrak{H} = \tau\, \mathrm{rot} \int \left[\mathrm{grad}\frac{1}{r}, u\right] df, \quad \mathfrak{A} = \tau \int \left[\mathrm{grad}\frac{1}{r}, u\right] df$$

$$\mathfrak{A}_n = \tau \int n\left[\nabla\frac{1}{r}, u\right] df = \tau \int u\left[n, \mathrm{grad}\frac{1}{r}\right] df = \tau \int \left[n, \mathrm{grad}\frac{1}{r}\right]_u df$$

$$\left[n\, \mathrm{grad}\frac{1}{r}\right]_x = n_y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - n_z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{n_y}{r}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{n_z}{r}}{\partial y} = \mathrm{rot}_x \frac{n}{r}, \quad \mathfrak{A}_u = \tau \int \mathrm{rot}_n \frac{n}{r}\, df = \tau \int \frac{n}{r}\, d\mathfrak{s}$$

$$\int df\{2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}\mathfrak{u})-\mathfrak{u}\mathfrak{E}^2\}=\int dv\{2\mathfrak{E}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}\}$$

$$\int dv\{2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}\}=\int df\{2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})(\mathfrak{E}\mathfrak{u})-(\mathfrak{u}\mathfrak{v})\mathfrak{E}^2\}$$

$$\mathrm{div}\,2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\mathfrak{E}=2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}+2\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})$$

$$\mathrm{grad}_x(\mathfrak{v}\mathfrak{E})=\left(\mathfrak{v}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x}+\mathfrak{v}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}+\mathfrak{v}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right)+\mathfrak{v}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}+\mathfrak{v}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}-\mathfrak{v}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}-\mathfrak{v}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}$$

$$=\mathfrak{v}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x}+\mathfrak{v}_y\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}+\mathfrak{v}_z\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}+\mathfrak{v}_y\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_y}{\partial x}-\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}\right)-\mathfrak{v}_z\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}-\frac{\partial\mathfrak{E}_z}{\partial x}\right)$$

$$=(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_x)+\mathfrak{v}_y\,\mathrm{rot}_z\mathfrak{E}-\mathfrak{v}_z\,\mathrm{rot}_y\mathfrak{E}=(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_x)+[\mathfrak{v}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}]_x$$

$$\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})=(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad})\mathfrak{E}=i(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_x)+j(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_y)+k(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_z)$$

$$2\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})=2\mathfrak{E}_x(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_x)+2\mathfrak{E}_y(\quad)+2\mathfrak{E}_z(\quad)=(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_x^2)+(\quad)+(\quad)$$

$$2\mathfrak{E}_x(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_x)=\mathfrak{v}_x2\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial x}+\mathfrak{v}_y2\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial y}+\mathfrak{v}_z2\mathfrak{E}_x\frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z}=(\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}_x^2)$$

weil $\mathfrak{v}$ konst.

$$2\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})=\mathfrak{v}_x\left(\frac{\partial\mathfrak{E}_x^2}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{E}_y^2}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{E}_z^2}{\partial x}\right)+\mathfrak{v}_y(\quad)+\mathfrak{v}_z(\quad)=\mathfrak{v}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{E}^2=\mathrm{div}(\mathfrak{v}\mathfrak{E}^2)$$

$$2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}=\mathrm{div}\,2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\mathfrak{E}-2\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}(\mathfrak{v}\mathfrak{E})=\mathrm{div}\{2(\mathfrak{E}\mathfrak{v})\mathfrak{E}-\mathfrak{v}\mathfrak{E}^2\}$$

$\cancel{k\,dv\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial s}}$ $\quad\mathrm{div}\,\mathfrak{D}=4\pi\rho=\mathrm{div}\,\varepsilon\mathfrak{E}=\varepsilon\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E}+\mathfrak{E}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon$

$$\mathfrak{T}_1\,\mathfrak{t}_1=2\mathfrak{E}(\mathfrak{E}_xu_x+\mathfrak{E}_yu_y+\mathfrak{E}_zu_z)-u(\mathfrak{E}_x^2+\mathfrak{E}_y^2+\mathfrak{E}_z^2)$$

$$\mathfrak{t}_x=(2\mathfrak{E}_x^2-\mathfrak{E}^2)u_x+2\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_yu_y+2\mathfrak{E}_x\mathfrak{E}_zu_z$$

$$\mathrm{grad}_x(\mathfrak{A}\mathfrak{B})=(\mathfrak{A}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{B}_x)+(\mathfrak{B}\,\mathrm{grad}\,\mathfrak{A}_x)+[\mathfrak{A}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{B}]_x+[\mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}]_x$$

$$\mathfrak{H}=\frac{J}{c}\int\frac{[d\mathfrak{s},\mathfrak{r}]}{r^3}\qquad\mathfrak{H}=\int\frac{\sin\varphi\,ds}{r^2}$$

$\sin\varphi=\frac{r_0}{r}\quad\cos\varphi=\frac{s}{r}$

$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{r_0}{s};\ s=r_0\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$

$ds=r_0\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi}d\varphi=\frac{r_0\,d\varphi}{\sin^2\varphi}$

$\frac{1}{r^2}=\frac{\sin^2\varphi}{r_0^2},\ \frac{ds}{r^2}=r_0\,d\varphi$

$\varphi = -\int(\mathfrak{P}\,dv, \operatorname{grad}\frac{1}{r})$ $\mathfrak{P}$ konstant Richtg z Achse

$\varphi = -|\mathfrak{P}|\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dv$, $r=\sqrt{(x-\xi)^2+\cdots}$ $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z} = -\frac{1}{r^2}\frac{z}{r} = -\frac{z}{r^3}$

$\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}dv = \frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}dv$, $\varphi = -(\mathfrak{P}\operatorname{grad}\int\frac{dv}{r})$ $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$\psi = \int\frac{dv}{r}$ außen gleich $\frac{4\pi}{3}a^3\frac{1}{R}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{4\pi a^3}{3}\frac{z}{R^3}$, $\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}|\mathfrak{P}|\frac{z}{R^3}$

$\varphi = -\frac{4\pi a^3}{3}(\mathfrak{P}\operatorname{grad}\frac{1}{R}) = \frac{4\pi a^3}{3R^3}(\mathfrak{R}\mathfrak{P}) = |\mathfrak{M}|\frac{z}{R^3} = -\frac{4\pi a^3}{3}|\mathfrak{P}|\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} = -(\mathfrak{M}\operatorname{grad}\frac{1}{R})$

innen $\psi = \frac{4\pi}{3}$

$\mathfrak{E}_a = \frac{4\pi a^3}{3}\frac{1}{R^2} = \frac{4\pi a^3}{3}\frac{\mathfrak{R}}{R^3}$ $\mathfrak{E}_i = \frac{4\pi R^3}{3}\frac{\mathfrak{R}}{R^3} = \frac{4\pi}{3}\mathfrak{R}$

$\varphi = -(\mathfrak{P}\operatorname{grad}\int\frac{dv}{r}) = +\frac{4\pi}{3}(\mathfrak{P}\mathfrak{R})$

$\mathfrak{E}_P = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{4\pi}{3}\mathfrak{P}$ $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_P = \mathfrak{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}_0 - \frac{4\pi}{3}\kappa\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}(1+\frac{4\pi\kappa}{3})$

$\varphi_a = \cancel{4\pi a}|\mathfrak{M}|\frac{z}{R^3}$, $\varphi_i =$ $\mathfrak{P} = \kappa\mathfrak{E} = \frac{3\kappa}{3+4\pi\kappa}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\frac{3}{3+4\pi\kappa} = \frac{3}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{E}(\frac{3+4\pi\kappa}{3})$

$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P} = (1+4\pi\kappa)\mathfrak{E} = \varepsilon\mathfrak{E} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{E} = \frac{3}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{P} = \kappa\mathfrak{E} = \frac{3}{4\pi}\frac{\varepsilon-1}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}_0$

Außen $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \mathfrak{E}_P = \mathfrak{E}_0 \pm \operatorname{grad}\varphi = \mathfrak{E}_0 - |\mathfrak{M}|\operatorname{grad}\frac{z}{R^3}$, $\mathfrak{M} = \frac{4\pi a^3}{3}\mathfrak{P} = a^3\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0$

$\cancel{\operatorname{grad}\frac{z}{R^3} = \frac{1}{R^3}\operatorname{grad}z + z\operatorname{grad}\frac{1}{R^3}}$ Grenzbedingungen an der Oberfläche:

$\mathfrak{E}_{t_1} = \mathfrak{E}_{t_2}$ d.h. $\mathfrak{E}$ stetig. $\mathfrak{D}_{n_1} = \mathfrak{D}_{n_2}$ Im Innern $\mathfrak{D} = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{D}_r = \frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}\mathfrak{E}_0\cos\vartheta$

außen $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0\cos\vartheta + |\mathfrak{M}|\operatorname{grad}_R\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} = (\mathfrak{E}_0 + \frac{2\mathfrak{M}}{R^3})\cos\vartheta$

$\cancel{|\mathfrak{M}|}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial R} = \frac{\partial -R^{-2}}{\partial z} = +2R^{-3}\frac{z}{R} = \frac{2z}{R^4} = \frac{2\cos\vartheta}{R^3}$

$\mathfrak{D}_{r=a} = \mathfrak{E}_0(1+\frac{2(\varepsilon-1)}{\varepsilon+2})\cos\vartheta = \mathfrak{E}_0\frac{\varepsilon+2+2\varepsilon-2}{\varepsilon+2}\cos\vartheta = \mathfrak{E}_0\frac{3\varepsilon}{\varepsilon+2}\cos\vartheta$

$\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z} = -\frac{1}{R^2}\frac{z}{R} = -\frac{z}{R^3}$ $\frac{\partial -z\cdot R^{-3}}{\partial R} = +3z\frac{1}{R^4}$, $\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial R} = -\frac{1}{R^2}$, $\frac{\partial R^{-2}}{\partial z} = \frac{2}{R^3}\frac{z}{R}$

$-\frac{1}{R^3}\frac{\partial z}{\partial R}$ $\cancel{z = \sqrt{R^2-x^2-y^2}}$ $\cancel{\frac{\partial z}{\partial R} = \frac{2R}{2z} = \frac{R}{z}}$

$\frac{\partial -\frac{z}{R^3}}{\partial x} = \frac{3zx}{R^5}$, $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{3zy}{R^5}$ $\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{1}{R^3} + \frac{3z^2}{R^5}$

$\frac{\partial -\frac{z}{R^3}}{\partial R} = \frac{3zx^2}{R^6} + \frac{3zy^2}{R^6} + \frac{3zz^2}{R^6} - \frac{1}{R^3}\frac{z}{R} = \frac{3z}{R^4} - \frac{z}{R^4} = \frac{2z}{R^4}$

$$\cancel{d\mathfrak{H} = \frac{\mathfrak{J}}{c}\frac{[d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]}{r^3} = \frac{1}{c}\frac{[i\,dv, \mathfrak{r}]}{r^3}}\quad \mathfrak{K}' = -\mathfrak{K}.$$

$$\cancel{\mathfrak{K}' = -\frac{1}{c}\frac{[i\,dv, \mathfrak{r}]}{r^3}},\quad \mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\frac{-\mathfrak{r}}{r^3},\ \frac{\mathfrak{r}}{r^3} = -\mu\mathfrak{H} = -\mathfrak{B}$$

$$\cancel{\mathfrak{K}' = \left[\frac{i}{c}\,\mathfrak{B}\right]dv}$$

$$\mathfrak{X} = \frac{1}{8\pi}\left\{2\mathfrak{H}(\mu\mathfrak{H}, u) - u\mu\mathfrak{H}^2\right\}d\,f$$

$$\eta\mathfrak{K} = \frac{1}{4\pi}\int\left\{\mathrm{div}\{(\eta\mathfrak{H})\mu\mathfrak{H}\} + \mathfrak{H}\,\mathrm{grad}(\eta\mu\mathfrak{H})\right\}dv$$

$$\mathrm{div}(\eta\mathfrak{H})\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\,\mathrm{grad}(\eta\mathfrak{H}) + \eta\mathfrak{H}\,\overset{0}{\mathrm{div}\,\mathfrak{H}}$$

$$\eta\mathfrak{K} = \frac{1}{4\pi}\int 2\mu\mathfrak{H}\,\mathrm{grad}(\eta\mathfrak{H})\,dv \qquad \mathrm{grad}(\eta\mathfrak{H}) = (\eta\,\mathrm{grad})\mathfrak{H} + [\eta\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}]$$

$$2\mu\mathfrak{H}\,\mathrm{grad}(\eta\mathfrak{H}) = \eta\,\mathrm{grad}\,\mu\mathfrak{H}^2 + \mathfrak{H}[\eta\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}]$$

$$= -\eta[\mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}]$$

Magnet. Quanten, ponderomot. Kräfte
Solenoid
Induktionsbegriff, Zweiteilung
Energiesatz, Maßdimens.

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}}e^{i\gamma} = \frac{n}{\mu} - i\frac{\kappa}{\mu} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}}\cos\gamma + i\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}}\sin\gamma$$

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}}\cos\gamma = \frac{n}{\mu},\ \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}}\sin\gamma = \frac{\kappa}{\mu}$$

$$\frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{E}} = \frac{\sqrt{n^2+\kappa^2}}{\mu} = \sqrt[4]{\frac{\varepsilon^2+4\sigma^2\tau^2}{\mu^2}}$$

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\kappa}{n},$$

$$(a+bi)e^{i\nu t} = (\cos\nu t + i\sin\nu t)(a+bi)$$

$$= a\cos\nu t - b\sin\nu t + ia\sin\nu t + ib\cos\nu t$$

$$A\sin(\nu t+\delta) = A\cos\delta\sin\nu t + A\sin\delta\cos\nu t$$

$$\mathfrak{E}_y = a\,e^{i\nu t}\ \cancel{\mathfrak{E}\cos(\nu t+\delta)} = \mathfrak{E}\,e^{i(\nu t+\delta)}$$

$$\mathfrak{E}\cos(\nu t+\delta)$$

$$\mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}\cos(\nu t+\delta)$$

$$a = \mathfrak{E}\,e^{i\delta}\qquad e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$= e^{i\alpha}e^{i\beta} = \cos\alpha\cos\beta - $$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta$$

$$n^2 = \frac{\mu}{2}\left\{2\sigma\tau\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2\tau^2}} + \varepsilon\right\}$$

$$= \frac{\mu}{2}\left\{2\sigma\tau\left(1+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2}{4\sigma^2\tau^2} + \frac{\varepsilon}{2\sigma\tau}\right)\right.$$

$$= \sigma\tau\{1$$

$$\mathrm{div}(\eta\mathfrak{H})\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\,\mathrm{grad}(\eta\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}\,\mathrm{grad}(\eta\mathfrak{H}) + \mathfrak{H}[\eta\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}]$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{div}\,\eta\mu\mathfrak{H}^2$$

$$\mathfrak{X}_\eta = \frac{1}{4\pi}\int dv\left\{\mathrm{div}(\eta\mathfrak{H})(\mu\mathfrak{H}) - \frac{1}{2}\mathrm{div}(\eta\mu\mathfrak{H}^2)\right\}$$

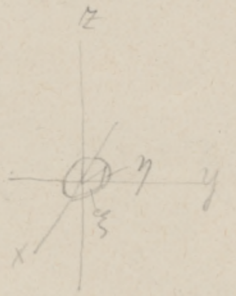
$$\mathfrak{X} = \int d\,f\left\{2\mathfrak{H}(\mu\mathfrak{H}, u) - u\mu\mathfrak{H}^2\right\}$$

$$\cancel{[\mathfrak{M}, \nabla_q \tfrac{1}{r}] = \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{M}}{r}}$$

$$\cancel{[\mathfrak{M}, \nabla_q \tfrac{1}{r}]_z = \mathfrak{M}_\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} - \mathfrak{M}_\eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} = -\mathfrak{M}_\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \mathfrak{M}_\eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = -\left(\frac{\partial \frac{\mathfrak{M}_x}{r}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{\mathfrak{M}_y}{r}}{\partial x}\right) = \operatorname{rot}_\xi \frac{\mathfrak{M}}{r}}$$

$$\cancel{\operatorname{rot}_\xi \frac{\mathfrak{M}}{r} = \frac{\operatorname{rot}_\xi \mathfrak{M}}{r}} +$$

$$[\mathfrak{M}, \nabla_q \tfrac{1}{r}] = \frac{\operatorname{rot}_q \mathfrak{M}}{r} - \operatorname{rot}_q \frac{\mathfrak{M}}{r}$$



$$\mathfrak{h} = \frac{J}{c} \int \frac{[d\sigma\, \mathfrak{r}]}{r^3} = -\frac{J}{c} \int [d\sigma, \operatorname{grad} \tfrac{1}{r}]$$

$$\mathfrak{A} = \frac{J}{c} \int \frac{d\sigma}{r}, \quad \mathfrak{A}_x = \frac{J}{c} \int \frac{d\xi}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \varrho_0^2, \quad \eta = \sqrt{\varrho_0^2 - \xi^2}, \quad \mathfrak{A}_x = \frac{J}{c} \int$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = x^2 - 2\xi x + \xi^2 + y^2 - 2\eta y + \eta^2 + z^2 - 2z\zeta + \zeta^2$$

$$= r_0^2 + \varrho_0^2 - 2(\mathfrak{r}_0 \bar{\xi}_0), \quad r = r_0 \sqrt{1 - 2\frac{(\mathfrak{r}_0 \varrho_0)}{r_0^2}} = r_0 - \left(\frac{\mathfrak{r}_0 \varrho_0}{r_0}\right)$$

$$R = R_0 - (\mathfrak{r} \operatorname{grad}_{R_0} R), \quad \operatorname{grad}_{R_0} R = \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{(x-\xi)^2 +}}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{x-\xi}{R}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \xi \left(\frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x}\right)_{R_0} + \cdots = \frac{1}{R_0} - \frac{\xi x}{R_0^3} - \frac{\eta y}{R_0^3} - \frac{\zeta z}{R_0^3}, \quad \zeta = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 = \varrho_0^2$$

$$\mathfrak{A}_x = \frac{J}{c} \int \frac{d\xi}{R} = \cancel{\frac{J}{c} \int \frac{d\xi}{R_0}}^{0} - \cancel{\frac{Jx}{cR_0} \int \xi\, d\xi}^{0} - \frac{Jy}{cR_0^3} \underbrace{\int \sqrt{\varrho_0^2 - \xi^2}\, d\xi}_{\pi \varrho_0^2}$$

$$\mathfrak{A}_x = -\frac{Jy\pi\varrho_0^2}{cR_0^3}, \quad \mathfrak{A}_y = -\frac{J}{c}\frac{x\pi\varrho_0^2}{R^3}, \quad \mathfrak{A}_z = 0$$

$$\mathfrak{h}_x = \operatorname{rot}_1 \mathfrak{A} = \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial z} = \frac{J\pi\varrho_0^2}{c} \frac{3xz}{R_0^5}, \quad \mathfrak{h}_y = \frac{J\pi\varrho_0^2}{c} \frac{3yz}{R_0^5}, \quad \mathfrak{h}_z = -\frac{J}{}$$

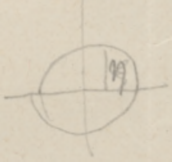
$$\frac{1}{R^3} = \frac{1}{R_0^3} - \frac{3\xi x}{R_0^5} - \frac{3\eta y}{R_0^5} - \frac{3\zeta z}{R_0^5}$$

$$\cancel{\mathfrak{h}_x = \frac{J}{c} \int \left(d\eta \cdot \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial z} - d\zeta \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial y}\right) = \frac{J}{c} \int}$$

$$\varphi = (\mathfrak{m} \operatorname{grad} \tfrac{1}{R_0}) = -m_z \frac{\partial \frac{1}{R_0}}{\partial z} = +m_z \frac{z}{R_0^3} \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -m_z \left(\frac{R_0^2}{R_0^5} - \frac{3z^2}{R_0^5}\right)$$

$$\mathfrak{h}_x = +\frac{J}{c} \int \frac{z\, d\eta}{R^3} = \frac{Jz}{R} \int \frac{d\eta}{R^3} = \frac{Jz}{c} \frac{3x\,\pi\varrho_0^2}{R_0^5}$$

$$-\frac{J}{c} \int \frac{y\, d\zeta}{R^3} = -\frac{Jy}{c} \int \frac{d\zeta}{R^3}$$



$$\xi^2 + \eta^2 = \text{konst}$$

$$\xi\, d\xi + \eta\, d\eta = 0$$

$$\eta\, d\xi + \frac{\eta^2}{\xi} d\eta = 0$$

$$\int \eta\, d\xi =$$

1) Stromkreis mit Widerstand u. Selbstinduktion: Spannung konst.
2) " " " : " periodisch
3) " Kapaz. " " : " konst.
4) " " " " : " periodisch
5) Gekoppelte Systeme

---

1) $\mathfrak{E}^e + \mathfrak{E}^i = \mathfrak{J}R$, $\mathfrak{E} = \mathfrak{J}R + \frac{\mathfrak{L}}{c^2}\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$

$\frac{\mathfrak{E}}{R} = \mathfrak{J} + \frac{\mathfrak{L}}{Rc^2}\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$ [illegible] durch $x = \mathfrak{J} - \frac{\mathfrak{E}}{R}$, $\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \frac{dx}{dt}$

$0 = x + \frac{\mathfrak{L}}{Rc^2}\frac{dx}{dt}$, $x = \mathfrak{C}e^{kt}$, $\frac{dx}{dt} = kx$, $1 + \frac{\mathfrak{L}}{Rc^2}k = 0$

$k = -\frac{\mathfrak{L}}{Rc^2}$, $\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{E}}{R} + x = \frac{\mathfrak{E}}{R} + \mathfrak{C}e^{-\frac{\mathfrak{L}}{Rc^2}t}$, für $t=0$ sei $\mathfrak{J}=0$, $k = -\frac{\mathfrak{E}}{R}$

$= -\frac{1}{\vartheta}$

$\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\vartheta}}\right)$, $\vartheta = \frac{\mathfrak{L}}{Rc^2}$, $[\vartheta] = \frac{cm}{cm^{-1}sec\,(cm\,sec^{-1})^2} = sec$

$\mathfrak{L} = 1$ Henry $= 10^9$, $R = 1$ Ohm $= \frac{10^{-9}}{900}$, $\vartheta = \frac{10^9 \cdot 900}{10^9 \cdot 9 \cdot 10^{20}} - 1\,sec$ dabei

---

2) $\mathfrak{E} = a\sin(\nu t)$, ν Zahl Schwingungen in 2π Sek.

$\mathfrak{E}$

$$E^i = \int \mathfrak{E}^i d\mathfrak{s} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \int \mathfrak{B}_n df = \int \mathfrak{A} d\mathfrak{s}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{\mu J}{c}\int \frac{d\mathfrak{s}}{r}, \quad \Phi = \frac{\mu J}{c}\iint \frac{d\mathfrak{s}_1 d\mathfrak{s}_2}{r_{12}} = \frac{1}{c} L_{12} J_1$$

$T = \frac{1}{2c}\int (\mathfrak{i}\,\mathfrak{A})\, dv$, Wir setzen $\mathfrak{i} = J\mathfrak{j};\ J\int \mathfrak{j}\, df = J,\ \mathfrak{A} = \frac{\mu J}{c}\int \frac{\mathfrak{j}}{r} dS$

$$T = \frac{1}{2c}\int \mathfrak{j}\, ds \int \quad = \frac{\mu J^2}{2c}$$

$$T = \frac{1}{2c^2} L J^2$$

$$\Phi_{11} = \int \mathfrak{A}_1 d\mathfrak{s}_1$$

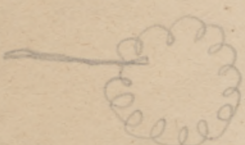
$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial J_1}\frac{dJ_1}{dt} + \frac{\partial T}{\partial J_2}\frac{dJ_2}{dt}$, ferner $2T = J_1\frac{\partial T}{\partial J_1} + J_2\frac{\partial T}{\partial J_2}$

$$2\frac{dT}{dt} = \frac{dJ_1}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_1} + \frac{dJ_2}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_2} + J_1\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_1} + J_2\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_2}$$

$$\frac{dT}{dt} = J_1\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_1} + J_2\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial J_2}\,!$$

Selbstinduktion geschl. Spule n Windungen, Länge l, Querschnitt q,

Kraftlinien geschlossen, Verlauf im Innern



$|\mathfrak{H}|\, l = \frac{4\pi n J}{c}, \quad |\mathfrak{H}| = \frac{4\pi n J}{c\,l}, \quad |\mathfrak{B}| = \mu\frac{4\pi n J}{c\,l}$

$$T = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{H}\mathfrak{B})\, dv = \frac{\mu}{8\pi}\int \mathfrak{H}^2 dv = \frac{\mu\mathfrak{H}^2}{8\pi}\int dv = \frac{\mu\mathfrak{H}^2}{8\pi} q l$$

$$T = \frac{\mu q l}{8\pi}\frac{16\pi^2 n^2 J^2}{c^2 l^2} = \frac{1}{2c^2}\frac{\mu q}{l} 4\pi n^2 J^2 = \frac{1}{2c^2} L J^2$$

$$L = \frac{4\pi\mu q n^2}{l}$$