Lieber Otto Stern,

Die Tage in Fr. waren zu heftig, als dass ich die Notiz hätte abschreiben können. Hier ist das, was Sie in G. diktierten.

Herr S.

———— - ————

Lieber Stern, es ist Sonntag den 22. II. und ich kriege eben Ihr Telegramm. Als ich obiges anfing zu schreiben, kamen die Möbelwagen und ich liess alles liegen. Bitte seien Sie nicht böse, ich hatte keinesfalls die Notiz direkt an Sch. gesandt, sondern erst Ihnen. Also ich fange an neuem an zu schaffen, dass meine Frau mich einen Moment einmal nicht ruft.

Herr S. hat unter obiger Überschrift Ausführungen über ~~unsere~~ die Auswertung unserer Magnetonversuche gemacht, die – wie wir durch mehrfache Anfragen merkten, die Meinung aufkommen lassen, dass unsere Berechnung um 100% falsch sein könne; und dass ferner die bei der Auswertung vorhandenen

Fehlerquellen
faktischen Unsicherheiten

nicht berücksichtigt worden sind; dass uns speziell der Einfluss der Spaltbreite entgangen wäre. Wenn auch die Überlegungen von Hrn. S. richtig sind, so ist die Abfassung der Notiz in der Tat geeignet, die oben erwähnten Missverständnisse hervorzurufen.

Herr S. spricht nämlich immer vom Abstand der Stelle maximaler Intensität im abgelenkten Streifen von dem Ort des unendlich schmal angenommenen unabgelenkten Streifens, für welchen Fall in der Tat die von uns benützte Formel fast 100% Fehler geben würde. Nun beziehen sich unsere Messungen aber stets auf die Mitte des abgelenkten

Streifens, was Herr S. erst gegen Schluss seiner Arbeit diskutiert; ~~und~~ für diesen Fall rechnet aber Herr S. selbst ungünstigstenfalls eine Abweichung von 20% aus.

Ferner scheint Herr S. anzunehmen, dass uns der Einfluss der Spaltweite nicht bekannt gewesen ist. Wir haben an der betr. Stelle verwiesen auf die Arbeit von Stern, wo ~~auch~~ der Einfluss der Spaltweite diskutiert ist und die betr. Formeln – entsprechend den Formeln von Sommerfeld – für den Fall der Corioliskraft bereits abgeleitet sind, worüber sich Herr S. beim Nachschlagen der Litteratur leicht hätte orientieren können.

Wir haben uns damals mit diesem Hinweis begnügt, und in Anbetracht der ~~Unsicherheit~~ Entstellung, welche durch die Entwicklung die Intensitätsverteilung erfährt, einen Fehler der Grössenordnung von ±10% als möglich angegeben.

Wir wiederholen, dass Herrn S.s Notiz gar keinen neuen Gedanken bringt, dass ~~ihr~~ Inhalt sich vielmehr vollkommen mit unserer Darstellung deckt. Wir legen nur gegen die Art seines Angriffs Verwahrung ein.

Lieber Herr, wie geht es Ihnen gesundheitlich? Es war zu schade, dass Sie in Gött. gar nicht wohl waren. Hier ist eben ein fürchterlicher [illegible]. Hoffentlich komme ich bald zur Ruhe. Ich schreibe Ihnen dann auch über die Atomstrahlsachen. Bitte veröffentlichen Sie u. [illegible] doch endlich mal etwas!

Herzl. Grüsse auch a. meiner [illegible]

Ihr [illegible].

Deutsches Reich

Dienstmarke

durch Eilboten.

Bote bezahlt.

Herrn Professor Dr. Otto Stern

Durch Eilboten

Exprès

Hamburg.

Isestrasse 7 I

Physikalisches Institut

TÜBINGEN

Geschlossen 9.20

23/II

HAMBURG 1
23.2.25. 6 10 N
EILBRIEFE

HAMBURG
23.2.25 5-6N

HAMBURG
23.2.25.6-7V
37

Physikalisches Institut
TÜBINGEN

HAMBURG
23.2.25.8-9N
37

Durch Eilboten
Exprès

Fra Forfatteren.

Sonderabdruck aus „Zeitschrift für Elektrochemie" 1918, Nr. 19/20.

DIE DISSOZIATION DER STARKEN ELEKTROLYTE[1]).

Von *Niels Bjerrum*, Kopenhagen.

Die Theorie, die während der letzten Jahrzehnte für die Entwicklung der Chemie die größte Bedeutung gehabt hat, ist sicherlich die von Arrhenius herrührende Theorie von den freien Ionen. Durch sie gewannen wir erst das rechte Verständnis von der Natur der Säuren, Basen und Salze und lernten den wirklichen Unterschied zwischen starken und schwachen Säuren, sowie zwischen normalen und komplexen Salzen kennen.

1) Vorgetragen in der 16. skandinavischen Naturforscherversammlung in Christiania 1916 (auf Dänisch gedruckt in den Verhandlungen der Versammlung).

Wenn man den Dissoziationsgrad, α, eines schwachen Elektrolyten aus dem elektrolytischen Leitvermögen nach der Gleichung:

$$\alpha = \frac{\mu}{\mu_\infty}$$

berechnet, schwankt der in der Weise bestimmte Dissoziationsgrad mit der Konzentration, gerade wie er es nach Guldberg und Waages Massenwirkungsgesetz tun soll; dieses Verhältnis hat seinerzeit viel zum Sieg der Ionentheorie beigetragen. Wenn man aber den Dissoziationsgrad eines starken Elektrolyten in derselben Weise berechnet, so treten eine

Reihe von Anomalien auf, die der Theorie bedeutende Schwierigkeiten bereitet haben: der Leitvermögensdissoziationsgrad stimmt gewöhnlich nicht überein mit dem durch die Gleichung:

$$\alpha = i - 1$$

bestimmten osmotischen Dissoziationsgrad, in welcher Gleichung i den sogenannten van't Hoffschen Koeffizienten[1]) bezeichnet, und keiner der gefundenen Werte stimmt mit dem Massenwirkungsgesetz überein. Im folgenden soll versucht werden, zu zeigen, wie diese und andere Schwierigkeiten der Arrheniusschen Theorie dadurch entstanden sind, daß man bei den starken Elektrolyten irrtümlich die Größen $\mu : \mu_\infty$ und $i - 1$ als Maße eines Dissoziationsgrades betrachtet hat. Daß $\mu : \mu_\infty$ und $i - 1$ bei den starken Elektrolyten mit der zunehmenden Konzentration immer mehr von 1 abnehmen, braucht nicht als Folge einer abnehmenden Dissoziation erklärt zu werden, sondern läßt sich in anderer Weise erklären, und eine Durchmusterung des vorliegenden Materials hat mich zu der Anschauung geführt, daß die starken Elektrolyten, praktisch betrachtet, als vollständig dissoziiert gelten müssen. Die neue Ansicht kann somit passend als die Hypothese von der vollständigen Dissoziation der starken Elektrolyte bezeichnet werden.

Begründung der Hypothese.

Eine Reihe von Untersuchungen über die Salze des Chroms hatten mich 1906[2]) zu dem Resultat geführt, daß die starken Elektrolyte sowohl in verdünnten als in konzentrierten Lösungen die Farbe des Ions besitzen, wenn sich nur nicht in der Lösung komplexe Verbindungen gebildet haben; zu demselben Resultat war gleichzeitig Hantzsch durch andere Untersuchungen gelangt. Auf Grund dieses Verhältnisses, daß die Farbe eines Elektrolyten von seiner Konzentration unabhängig ist, stellte ich 1909 die Hypothese auf, daß die starken Elektrolyte in Lösung mutmaßlich vollständig in Ionen gespalten sind (insofern sich keine komplexen Verbindungen gebildet haben)[3]). Diese Hypothese bewirkt, daß man den Einfluß der Konzentration auf das molekulare Leitvermögen und auf den van 't Hoff-Koeffizienten, i, anders erklären muß als bisher, und es wurde bereits damals angedeutet, daß man wahrscheinlich diese Effekte als eine Folge der elektrischen

1) Der van 't Hoffsche Koeffizient, i, gibt das Verhältnis zwischen dem beobachteten Wert und dem ohne Annahme von Dissoziation erwarteten Wert des osmotischen Drucks (Gefrierpunktsenkung, Siedepunktsteigerung) an.

2) Det kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter (7) 4, 26 (1906).

3) Proceedings of the 7th International Congress of Applied Chemistry, London 1909, Section X.

Kräfte zwischen den Ionen müsse erklären können. Dies wurde durch das sonst schwer verständliche Verhältnis befürwortet, daß für den Einfluß hauptsächlich die elektrischen Eigenschaften des Systems (Anzahl von Ionen, Größe der elektrischen Ladung der Ionen und Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels) maßgebend sind. Es wurde ferner hervorgehoben, daß die Anomalien der starken Elektrolyte wegfallen, wenn $\mu : \mu_\infty$ und $i - 1$ nicht länger als Maße eines Dissoziationsgrades betrachtet werden. Es ist aber natürlicherweise klar, daß die Berechtigung der Annahme der Hypothese von der vollständigen Dissoziation der starken Elektrolyte darauf beruht, ob man wirklich imstande ist, die Größe von $\mu : \mu_\infty$ und $i - 1$ in plausibler Weise als eine Folge der elektrischen Ladungen der Ionen zu erklären.

Seit einiger Zeit beschäftige ich mich nun wieder mit der Hypothese, und es ist mir gelungen, annäherungsweise zu berechnen, um wieviel die elektrischen Kräfte zwischen den Ionen den osmotischen Druck vermindern müssen; dabei ergab sich, daß der Effekt einigermaßen die Größe hatte, die er haben sollte. Nachdem ich soweit gekommen war, entdeckte ich indessen, daß Milner[1]) in den Jahren 1912 bis 1913 eine ähnliche Berechnung bewerkstelligt hatte, und da seine Berechnungen einen bedeutend höheren Grad von Genauigkeit aufwiesen als die meinigen, habe ich den folgenden Angaben seine Resultate zugrunde gelegt.

Die durch die elektrischen Ladungen der Ionen hervorgebrachte Verminderung des osmotischen Druckes, die man passend als den Milnereffekt bezeichnen kann, ist in Fig. 90 durch die ausgezogene Kurve angegeben; die Kurve gibt die Verminderung für einen aus zwei monovalenten Ionen bestehenden Elektrolyten an. Vergleichshalber ist durch Kreuze die Verminderung angegeben, die auf experimentellem Wege mittels Gefrierpunktbestimmungen für Kaliumchlorid gefunden wurde. Wie man sieht, hat der Milnereffekt die rechte Größenordnung, namentlich bei den Konzentrationen, die weder so klein sind, daß die experimentellen Bestimmungen zu unsicher sind, oder so groß, daß Milners Berechnung, deren Genauigkeit mit zunehmender Konzentration abnimmt, zu unzuverlässig ist. Die gestrichelte Kurve gibt an, wie der osmotische Druck verlaufen sollte, wenn er durch die Annahme von undissoziierten, nach Guldberg und Waages Gesetz gebildeten Molekülen erklärt werden sollte. Diese Kurve paßt viel schlechter als die Milnersche, obschon bei ihrer Berechnung eine entsprechende, dazu auserlesene Dissoziationskonstante benutzt wurde, während

1) Phil. Mag. (6) 23, 551 (1912); (6) 25, 743 (1913).

eine solche Wahl bei der Milnerkurve nicht stattfindet.

Der Milnereffekt ist eine unmittelbare Folge davon, daß die Ionen einander nach Coulombs Gesetzen anziehen und abstoßen, und wenn man den Verlauf des osmotischen Drucks durch die Annahme einer unvollständigen Dissoziation deuten will, so muß man notwendigerweise erst klarlegen, weshalb man vom Milnereffekt absehen kann.

Wenn man annehmen will, daß die starken Elektrolyte vollständig ionisiert sind, hat man die Pflicht, auch die Aenderung des Leitvermögens mit der Konzentration als eine Folge der elektrischen Ladungen der Ionen erklären zu können. Hertz[1]) untersuchte 1912 die Beeinflussung des Leitvermögens der Ionen durch die elektrischen Kräfte, die zwischen ihnen wirksam sind, und er fand, daß dieser Effekt, den man passend als den Hertzeffekt bezeichnen kann, bewirken muß, daß das Leitvermögen der Ionen mit zunehmender Konzentration abnimmt. Er hat auch eine Formel für diesen Effekt hergeleitet und gezeigt, daß sie zur Erklärung des experimentell gefundenen Verlaufs des Leitvermögens, z. B. für Natriumchlorid, benutzt werden kann; da aber seine Formel Größen enthält, die nur wenig bekannt sind (z. B. die freie Weglänge der Ionen in der Lösung), und da die Werte, die man für diese Größen benutzen muß, nicht die wahrscheinlichsten sind, ist eine weitere Arbeit erforderlich, bevor man es als sicher betrachten kann, daß der Hertzeffekt in vollem Maße imstande ist, die Abänderung des Leitvermögens der starken Elektrolyte mit der Konzentration zu erklären.

Nachdem wir nun gesehen haben, daß Gefrierpunktbestimmungen und Leitvermögensbestimmungen auf Grund bzw. des Milnereffekts und des Hertzeffekts nicht zum Messen des Dissoziationsgrades der starken Elektrolyte geeignet sind, erübrigt noch, zu betrachten, wie es sich mit der dritten Methode verhält, die man dazu benutzt hat, und die auf der katalytischen Wirksamkeit der Ionen beruht. Da es namentlich die Wasserstoffionen sind, die katalytisch wirken, hat man vorzugsweise den Dissoziationsgrad der Säuren in dieser Weise zu bestimmen gesucht. Die meisten Forscher, welche starke Säuren in dieser Weise untersuchten, fanden, daß die katalytische Wirksamkeit der Säure der Bruttokonzentration der Säure proportional ist, ohne Rücksicht darauf, daß das molekulare Leitvermögen der Säure innerhalb weiter Grenzen schwankt. Als Beispiel dazu führe ich einige Messungen von

1) Ann. d. Phys. (4) 37, 1 (1912).

Goldschmidt und Thuesen[1]) über die ätherifizierende Wirkung des Chlorwasserstoffs auf organische Säuren an, die in Methylalkohol gelöst wurden (Tabelle 1).

Tabelle 1.
Aetherifizierende Wirkung des Chlorwasserstoffs in Methylalkohol.

c	k/c für			$\mu : \mu_\infty$ für Salzsäure
	Isobuttersäure	Benzoesäure	Essigsäure	
0,1	—	0,308	—	0,601
0,05	31,0	0,311	97,1	0,672
0,025	31,7	—	100,2	0,734
0,01	—	—	92,7	0,806

c = molare Konzentration des Chlorwasserstoffs.
k = Geschwindigkeitskonstante bei der Aetherifizierung.

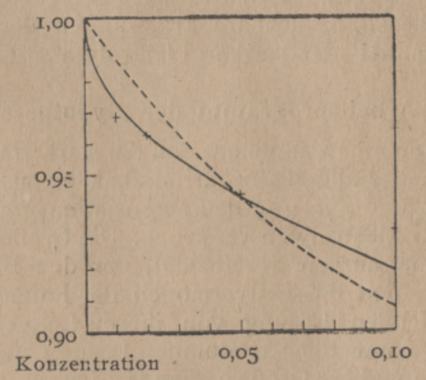


Fig. 90. Abnahme des osmotischen Druckes
——— nach Milner,
- - - - - nach dem Massenwirkungsgesetz.
+ + nach Gefrierpunktbestimmungen.

Snethlage[2]) hat mit besonderer Kraft das Merkwürdige an diesem Verhältnis hervorgehoben und gezeigt, daß es darauf deutet, daß die starken Elektrolyte entweder gar nicht dissoziiert sind, oder daß sie vollständig dissoziiert sind. Während Snethlage aber aus Gründen, denen ich kein Gewicht beimessen kann, erstere Alternative vorzieht, ist meiner Ansicht nach die Annahme vorzuziehen, daß die starken Elektrolyte vollständig ionisiert sind, indem es mir eine Unmöglichkeit scheint, die Arrheniussche Vorstellung von den freien Ionen aufzugeben. Wenn man $i - 1$ und $\mu : \mu_\infty$ als Maße eines Dissoziationsgrades der starken Säuren aufrecht erhalten will, muß man, um die katalytischen Messungen zu erklären, annehmen, daß nicht nur die Wasserstoffionen, sondern auch die undissoziierten Säuremoleküle die Aetherbildung katalysieren, eine Hilfshypothese, durch die das Schöne bei der Anwendung der Ionentheorie auf die Katalyseerscheinungen ganz beseitigt wird.

Kurz zusammengefaßt, läßt sich dasjenige, was man somit zurzeit vom Dissoziationsgrad der

1) Zeitschr. f. physik. Chemie 81, 30 (1913).

2) Zeitschr. f. physik. Chemie 90, 1 u. 139 (1915).

starken Elektrolyte sagen kann, folgendermaßen ausdrücken:

Die osmotischen Messungen und die katalytischen Messungen deuten auf vollständige Dissoziation, und die Leitvermögensmessungen widerstreben nicht einer vollständigen Dissoziation.

Jeder, der $i - 1$ oder $\mu : \mu_\infty$ als Maße des Dissoziationsgrades eines starken Elektrolyten aufrechterhalten will, muß erst klarlegen, weshalb der Milnereffekt und der Hertzeffekt ausbleiben sollten, und muß sodann zur Erklärung der katalytischen Messungen die Hilfshypothese von der katalytischen Wirkung der undissoziierten Säuremoleküle aufstellen, und nachdem man diese Schwierigkeiten überwältigt hat, erübrigt noch, mittels dazu geeigneter Hilfshypothesen brauchbare Erklärungen der vielen „Anomalien der starken Elektrolyte" zu finden.

Arbeitsprogramm der Hypothese.

Wenn man annimmt, daß die starken Elektrolyte vollständig dissoziiert sind, kann man nicht länger unter $\mu : \mu_\infty$ den Dissoziationsgrad eines starken Elektrolyten verstehen. Die Größe $\mu : \mu_\infty$ ist dann nur ein Koeffizient, der den Bruchteil angibt, den das Leitvermögen der Ionen in der betreffenden Lösung von ihrem Leitvermögen in einer unendlich verdünnten Lösung ausmacht; man kann diese Größe passend Leitvermögenskoeffizient nennen und als f_μ bezeichnen. Der van 't Hoff-Koeffizient, i, der die osmotische Wirkung eines Elektrolyten angibt (z. B. dessen Einfluß auf den Gefrierpunkt), kann nicht länger gleich $1 + x$ gesetzt werden, wo x den Dissoziationsgrad bezeichnet; man hat mit einem osmotischen Koeffizienten zu rechnen, $f_0 = p : p_0$, wo p den osmotischen Druck der Lösung und p_0 den osmotischen Druck bezeichnet, den man haben sollte, falls die Ionen sich wie entladene Moleküle verhielten. (Für binäre Elektrolyte ist $f_0 = \frac{i}{2}$.) Schließlich ist es notwendig, einen Aktivitätskoeffizienten f_α einzuführen, der das Verhältnis zwischen der aktiven Masse und der Konzentration des Ions angibt, indem man nicht damit rechnen muß, daß dieses Verhältnis dem durch den Leitvermögenskoeffizienten definierten Dissoziationsgrad gleich ist. (In gewissen Fällen mag es praktisch sein, statt mit dem Aktivitätskoeffizienten f_α mit $-\log f_\alpha$ zu rechnen, und diese Größe kann passend Exponentialabweichung oder Potentialabweichung genannt werden.)

$$f_\mu = \frac{\mu}{\mu_\infty}; \quad f_0 = \frac{p}{p_0}\left(= \frac{2}{i}\right);$$

$$f_\alpha = \frac{\text{aktive Masse}}{\text{Konzentration}}.$$

Die Hypothese stellt uns nun die Aufgabe, durch experimentelle Untersuchungen und theoretische Erörterungen die Größe dieser Koeffizienten zu bestimmen und die für die sie geltenden Gesetze zu finden, so unter anderem zu entdecken, ob zwischen den verschiedenen Koeffizienten Relationen bestehen. Insofern ich das Material bisher beurteilen konnte, sind alle jene Koeffizienten hauptsächlich von der Ionenkonzentration der Lösung, von der Valenz der Ionen und von der Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels und nur in geringem Grade von den übrigen Eigenschaften der Ionen, z. B. Gewicht und Raumgehalt, abhängig. Dieses Verhältnis bewirkt, daß es leicht ist, sich einen Ueberblick über die Größe dieser Koeffizienten in einer Elektrolytenlösung zu verschaffen. Eine Formel wie:

$$-\log f_\alpha = 26 \cdot \frac{n^2}{K} \sqrt[3]{C_{\text{Ion}}},$$

wo n die Valenz der Ionen, K die Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels und C_{Ion} die Ionenkonzentration der Lösung bezeichnen, gibt in vielen Fällen annäherungsweise die Größe des Aktivitätskoeffizienten an.

Was die Größe des Leitvermögenskoeffizienten betrifft, liegt bekanntlich ein ungeheures experimentelles Material vor, und die für seine Größe geltenden Gesetze sind namentlich durch Waldens und Noyes Untersuchungen bekannt. Dieser Koeffizient ist bisher bei einer Menge von Berechnungen benutzt worden, bei denen man tatsächlich den Aktivitätskoeffizienten hätte benutzen sollen, z. B. bei Berechnungen von Gleichgewichtskonstanten homogener und heterogener chemischer Gleichgewichte und bei Berechnungen elektromotorischer Kräfte; man hat ja bisher angenommen, daß diese Koeffizienten identisch seien; dies ist indessen bei weitem nicht der Fall, und allenfalls verschwindet ein bedeutender Teil der Anomalien, zu deren Erklärung man die Hypothese vom Einfluß der Neutralsalze auf chemische Gleichgewichte aufstellen mußte, wenn man mit dem richtigen Wert des Aktivitätskoeffizienten rechnet statt mit dem Leitvermögenskoeffizienten.

Methoden zur Bestimmung des Aktivitätskoeffizienten.

Um darzutun, was man sich aus einer Durchführung seiner Berechnungen auf der Grundlage der neuen Hypothese erwarten kann, nehmen wir im folgenden einige Beispiele davon durch, wie man den Aktivitätskoeffizienten berechnen kann. Dieser Koeffizient ist der in chemischer Beziehung interessanteste und blieb demungeachtet bisher unbeachtet. Bei diesen Berechnungen werden wir Gelegenheit haben,

zu sehen, wie überall früher festgestellte Anomalien bei Benutzung der gefundenen Werte der Aktivitätskoeffizenten verschwinden.

1. Der Aktivitätskoeffizient kann vom osmotischen Koeffizienten aus bestimmt werden, indem thermodynamisch folgende Gleichung zwischen diesen Koeffizienten hergeleitet werden kann:

$$f_0 + c \cdot \frac{df_0}{dc} = 1 + c \cdot \frac{d \ln f_\alpha}{dc} \text{ [1]}.$$

Diese thermodynamische Relation ist von großem Interesse und besitzt viele überraschende Eigenschaften. Darauf werden wir hier nicht näher eingehen, sondern die Gleichung nur zu einer Berechnung des Aktivitätskoeffizienten für Kaliumchlorid benutzen, für welches Salz man durch Gefrierpunktsmessungen den osmotischen Koeffizienten kennt. Nach Noyes und Falks Angaben[2] kann man die vorliegenden Bestimmungen in folgende Interpolationsformel zusammenfassen (c ist die molare Konzentration):

$$f_0 = 1 - 0{,}146 \sqrt[3]{c}.$$

Daraus erhält man durch Eintragung in die thermodynamische Gleichung:

$$\ln f\alpha = -4 \cdot 0{,}146 \sqrt[3]{c},$$

also

$$\log f\alpha = -0{,}253 \sqrt[3]{c}.$$

1) Für eine Mischung von x Grammolekülen von 1-Komponenten und $1 - x$ Grammolekülen von 2-Komponenten gilt:

$$x \cdot \frac{dA_1}{dx} + (1 - x)\frac{dA_2}{dx} = 0,$$

wo A_1 und A_2 die freie Energie bezeichnen, die man gewinnen kann, wenn ein Grammolekül der entsprechenden Komponenten zu einer großen Menge der Mischung gesetzt wird. Für ideale Mischungen ist:

$$A_1 = -RT \ln x \text{ und } A_2 = -RT \ln(1 - x).$$

Für nicht ideale Mischungen geben der osmotische Koeffizient und der Aktivitätskoeffizient die Abweichung der Mischung von einer idealen Mischung an:

$$A_1 = -RT \ln(x \cdot f_\alpha) \text{ und } A_2 = -RT f_0 \ln(1 - x),$$

indem die 1-Komponente mit der Konzentration x als der gelöste Stoff und die 2-Komponente als Lösungsmittel betrachtet wird.

Durch die Eintragung in erstgenannte Gleichung erhält man hieraus:

$$f_0 - (1 - x)\ln(1 - x)\frac{df_0}{dx} = 1 + x \cdot \frac{d \ln f_\alpha}{dx}.$$

Für verdünnte Lösungen (kleine x-Werte) ist $(1 - x)\ln(1 - x)$ sehr nahezu gleich $-x$, und die Gleichung läßt sich somit folgendermaßen schreiben:

$$f_0 + x\frac{df_0}{dx} = 1 + x\frac{d \ln f_\alpha}{dx}.$$

Aus der Form dieser Gleichung folgt, daß man berechtigt ist, statt x-Konzentrationen andere Konzentrationen einzuführen, die ihnen proportional sind, für verdünnte Lösungen also z. B. molare Konzentrationen, c.

Die hergeleitete Gleichung zwischen f_0 und f_α gilt freilich exakt nur für verdünnte Lösungen, eine eingehendere Erörterung ergibt aber, daß die Gleichung sogar bei recht großen Konzentrationen ohne Einführung eines merkbaren Fehlers anwendbar ist.

2) Journ. Amer. Chem. Soc. 32, 1011 (1910).

In der folgenden Tabelle 2 sind die Werte von f_0, $f\alpha$ und $f\mu$ für Kaliumchlorid zusammengestellt.

Tabelle 2.

Werte der Abweichungskoeffizienten für KCl.

Mol. Konz.	f_0	f_α	$f_\mu \left(= \frac{\mu}{\mu_\infty}\right)$
0,001	0,985	0,943	0,979
0,01	0,969	0,882	0,941
0,1	0,932	0.762	0,861
1,0	0,854	0,558	0,755

Die Tabelle zeigt, daß der Aktivitätskoeffizient überall mehr von 1 abweicht als der Leitvermögenskoeffizient. Es ist daher ganz natürlich, daß man früher, wenn man den Leitvermögenskoeffizienten benutzte, wo man den Aktivitätskoeffizienten hätte benutzen sollen, Anomalien vorfand.

Der osmotische Koeffizient ist für alle monovalenten Elektrolyte ungefähr der gleiche. Durchschnittlich ist der Wert nach Noyes und Falks Zusammenstellung jedoch ein wenig größer als für Kaliumchlorid; man muß für einen binären, monovalenten starken Elektrolyten in wässeriger Lösung mit

$$f_0 = 1 - 0{,}17 \sqrt[3]{c}$$

rechnen, was

$$\log f_\alpha = -0{,}3 \sqrt[3]{c}$$

ergibt.

2. Der Aktivitätskoeffizient kann durch elektromotorische Messungen bestimmt werden, und er, nicht aber der Leitvermögenskoeffizient soll bei Berechnungen elektromotorischer Kräfte aus Konzentrationsketten und anderen galvanischen Elementen benutzt werden. Zur Veranschaulichung benutzen wir eine ältere Messung des Elements:

Hg | HgCl, 0,1 n. KCl | 0,01 n. KCl, HgCl | Hg[1].

Nach Elimination des Diffusionspotentials ergab sich für dieses Element ein Elektrodenpotential $\varepsilon = 0{,}0548$ Volt. Nach der Nernstschen Formel:

$$\varepsilon = 0{,}0591 \log \frac{c_2}{c_1}$$

wird

mit den Bruttokonzentrationen . $\varepsilon = 0{,}0591$,

mit dem Leitvermögenskoeffizienten $f\mu$ . . . . $\varepsilon = 0{,}0569$,

mit dem Aktivitätskoeffizienten $f\alpha$: $\varepsilon = 0{,}0553$

berechnet.

Die Abweichung zwischen dem letztgenannten Werte und dem auf experimentellem Wege gefundenen ist so klein, daß sie keine Bedeutung hat[2].

1) Z. f. Elektroch. 17, 392 (1911).

2) Bei der Berechnung der elektromotorischen Kraft ist der Aktivitätskoeffizient des Chlorions zu be-

Eine sehr wichtige Methode zur Bestimmung des Aktivitätskoeffizienten ist die Untersuchung chemischer Gleichgewichte. So kann man den Aktivitätskoeffizienten der Ionen der Pikrinsäure in Methylalkohol bestimmen, indem man feststellt, wie sich der Dissoziationsgrad der Pikrinsäure in methylalkoholischer Lösung mit der Konzentration ändert. Den Dissoziationsgrad der Pikrinsäure in Methylalkohol kann man aus einigen von Goldschmidt und Thuesen veröffentlichten Leitvermögensmessungen [1]) berechnen. Durch dieses Beispiel wird man gleichzeitig Gelegenheit haben, zu sehen, wie man nach der neuen Hypothese die Berechnung des Dissoziationsgrades eines schwachen Elektrolyten aus dessen Leitvermögen zu bewerkstelligen hat. Die gewöhnlich benutzte Formel, nach der der Dissoziationsgrad, x, gleich $\mu : \mu_\infty$ ist, ist nämlich nicht länger zu benutzen, indem von ihr zu erwarten ist, daß sie nur für die schwächsten Elektrolyte ganz richtige Resultate ergeben wird. Zu bemerken ist, daß Goldschmidt und Thuesen bei Berechnung in der alten Weise Werte des Dissoziationsgrades der Pikrinsäure erhielten, die nicht mit dem Massenwirkungsgesetz übereinstimmen, sondern Anomalien aufweisen, wie man sie durch die Bezeichnung Neutralsalzwirkung charakterisiert hat.

Pikrinsäure ist in Methylalkohol ein schwacher Elektrolyt, und ihr molares Leitvermögen weicht von dem Leitvermögen bei unendlicher Verdünnung ab, teils weil die Säure nur teilweise ionisiert ist, teils weil die Ionen wie in starken Elektrolyten einander beeinflussen. Wenn der Dissoziationsgrad α ist, und wenn der Einfluß der gegenseitigen Beeinflussung der Ionen ausdrückende Leitvermögenskoeffizient f_μ ist, so muß

$$\frac{\mu}{\mu_\infty} = \alpha \cdot f_\mu$$

Geltung haben.

Aus dieser Gleichung kann α berechnet werden, indem die Leitvermögensbestimmungen $\mu : \mu_\infty$ ergeben und man für f_μ den Wert benutzt, den der Leitvermögenskoeffizient für Salzsäure in Methylalkohol bei derselben Ionenkonzentration besitzt. Die benutzten Werte von $\mu : \mu_\infty$ und f_μ und die berechneten Werte von α finden sich in der folgenden Tabelle 3.

Tabelle 3.

Mol. Konz.	μ/μ_∞	f_μ	α	K_c	f_α	f_α (ber.)
0,2	0,0372	0,81	0,046	$4{,}44 \cdot 10^{-4}$	0,673	0,679
0,1	0,0512	0,84	0,061	3,96	0,712	0,714
0,05	0,0700	0,86	0,0815	3,615	0,746	0,745
0,025	0,0960	0,875	0,1095	3,4	0,769	0,773
0,012 5	0,1309	0,89	0,147	3,17	0,797	0,802
0,006 25	0,1760	0,90	0,195	2,95	0,825	0,822
0,003 125	0,2358	0,91	0,259	2,83	0,843	0,843
0,001 562	0,3117	0,92	0,339	2,72	0,860	0,861
0	—	—	—	2,01	—	—

Die 5. Kolumne, K_c, enthält den Wert des Ausdrucks

$$K_c = \frac{c\alpha \cdot c\alpha}{c(1-\alpha)} = c \cdot \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$$

Wenn der Aktivitätskoeffizient der Ionen gleich 1 wäre, müßte dieser Ausdruck eine konstante Größe sein. Wie die Tabelle zeigt, ändert sich dieser Ausdruck jedoch bedeutend mit der Konzentration der Pikrinsäure, und aus seiner Abänderung läßt sich der Aktivitätskoeffizient der Ionen berechnen. Führt man den Aktivitätskoeffizienten ein, so ergibt nämlich das Massenwirkungsgesetz, daß

$$K = \frac{c\alpha f_\alpha \cdot c\alpha f_\alpha}{c(1-\alpha)} = c\,\frac{\alpha^2}{1-\alpha} \cdot f_\alpha^2 = K_c f_\alpha^2$$

eine konstante Größe sein muß. Somit muß für den Aktivitätskoeffizienten

$$f_\alpha = \sqrt{\frac{K}{K_c}}$$

Geltung haben.

Der Wert von K ist gleich dem von K_c bei unendlicher Verdünnung und kann durch Extrapolation der K_c-Werte berechnet werden. Wenn man für K den extrapolierten Wert $2{,}01 \cdot 10^{-4}$ benutzt, erhält man für f_α die in der zweitletzten Kolumne der Tabelle angeführten Werte.

Diese Werte der Größe des Aktivitätskoeffizienten in Methylalkohol stimmen vorzüglich überein mit der Größe des Aktivitätskoeffizienten in wässerigen Lösungen, was aus folgender Erörterung hervorgeht.

Die gefundenen Werte des Aktivitätskoeffizienten der Pikrinsäureionen in Methylalkohol lassen sich in folgende Interpolationsformel zusammenfassen:

$$\lg f_\alpha = -0{,}8\sqrt[3]{c_{Ion}}.$$

Danach ist der Aktivitätskoeffizient in Methylalkohol $^8/_3$ mal größer als in Wasser; dies stimmt jedoch eben vorzüglich damit überein, daß die Dielektrizitätskonstante des Wassers $^8/_3$ mal so gros ist wie die des Methylalkohols.

4. Als letztes Beispiel von der Anwendung der Hypothese von der vollständigen Dissoziation der starken Elektrolyte wollen wir die Erläuterung von Goldschmidt und Thuesens wichtigen Messungen der Aetherifizierungsgeschwindigkeit

nutzen; durch die Gefrierpunktbestimmungen an der Kaliumchloridlösung findet man das Mittel der Aktivitätskoeffizienten für das Kaliumion und für das Chlorion. Also nur wenn die Aktivitätskoeffizienten des Kaliumions und des Chlorions gleich groß sind, sind die obenstehenden Berechnungen ganz exakt; es ist aber zu erwarten, daß diese Voraussetzung mit guter Annäherung erfüllt ist.

1) Zeitschr. f. physik. Chemie 81, 30 (1913).

der organischen Säuren in Methylalkohol mit Pikrinsäure als Katalysator durchnehmen. Wenn man eine Säure, wie Essigsäure, in Methylalkohol löst, geht die Aetherifizierung der Essigsäure, d. h. die Bildung von Methylazetat, sehr langsam vonstatten und setzt erst kräftig ein, wenn man eine mittelstarke oder eine starke Säure, z. B. Pikrinsäure oder Salzsäure, zusetzt. Vom Standpunkt der Ionentheorie muß man annehmen, daß es die allen Säuren gemeinsamen Wasserstoffionen sind, die beschleunigend auf die Aetherifizierung wirken. Dieser Vorstellung hat man denn auch von den ersten Tagen der Ionentheorie an gehuldigt. Die neuesten und genauesten Messungen der Aetherifizierungsgeschwindigkeit haben sich indessen nicht auf Grund dieser Vorstellung erklären lassen, indem es sich gezeigt hat, daß die Geschwindigkeitskonstante der Aetherifizierung derjenigen Wasserstoffionenkonzentration nicht ganz genau proportional ist, die man findet, wenn man den Dissoziationsgrad der katalysierenden Säure nach der Formel:

$$\alpha = \mu : \mu_\infty$$

berechnet.

So geben Goldschmidt und Thuesen an, daß 0,05 n. HCl organische Säuren durchschnittlich 8,24mal so schnell ätherifizieren wie 0,1 n. Pikrinsäure, während man nach den Leitvermögensbestimmungen berechnet, daß das Verhältnis zwischen den Wasserstoffionenkonzentrationen 6,56 beträgt; um diese Unübereinstimmung zu erklären, müssen sie zu der unbefriedigenden Hypothese ihre Zuflucht nehmen, daß die undissoziierten Säuremoleküle auch ätherifizierend wirken.

Von den neuen Ansichten über die Dissoziation der starken Elektrolyte aus, bieten Goldschmidt und Thuesens Messungen dagegen keine Anomalien dar. Dies erhellt aus der folgenden Tabelle 4:

Tabelle 4.

	0,05 n. HCl	0,1 n. Pikrinsäure		0,1 n. Pikrinsäure + 0,15 n. Pikrat	
	k	k	α	k	α
Phenylessigs.	2,23	0,265	0,0595	0,047	0,0105
Essigsäure .	4,86	0,590	0,0607	0,100	0,0103
n-Buttersäure	2,23	0,277	0,0621	0,053 5	0,0120
i-Buttersäure	1,55	0,196	0,0632	0,035 3	0,0114
i-Valeriansäure	0,583	0,073 5	0,0630	0,001 44	0,0123
Benzoesäure .	0,0156	0,001 75	0,0561	0,000 26	0,0084
			0,0606		0,0108

Hier sind zuerst die Geschwindigkeitskonstanten (k) der Aetherifizierung verschiedener schwacher organischer Säuren mit bzw. 0,05 n. Salzsäure und 0,1 n. Pikrinsäure angegeben. Wenn man annimmt, daß die Salzsäure vollständig dissoziiert ist, und daß die Aetherifizierungsgeschwindigkeit der Wasserstoffionenkonzentration proportional ist, kann man den Dissoziationsgrad von 0,1 n. Pikrinsäure in Methylalkohol (α) berechnen. Das Mittel der gefundenen Werte ist 0,0606, was vorzüglich mit dem Werte 0,061 übereinstimmt, der S. 323 vom Dissoziationsgrad von 0,1 n. Pikrinsäure in Methylalkohol bei korrekt durchgeführter Berechnung auf Grund von Leitvermögensbestimmungen gefunden wurde. Der etwas abweichende Wert des Dissoziationsgrades, den die Aetherifizierung von Benzoesäure ergeben hat, läßt sich vielleicht daraus erklären, daß diese Säure so langsam ätherifiziert wird, daß es nicht gestattet ist, von der Aetherifizierung der Salzsäure selbst während eines Versuches abzusehen.

Einen wichtigen Anhalt für die Hypothese von der ätherifizierenden Wirksamkeit der undissoziierten Säuremoleküle finden Goldschmidt und Thuesen an einigen Versuchen über die ätherifizierende Wirkung von 0,1 n. Pikrinsäure, zu der 0,15 n. Anilinpikrat gesetzt wurde. Die Geschwindigkeitskonstanten bei Aetherifizierung mit dieser Mischung finden sich in der Tabelle; aus diesen Geschwindigkeitskonstanten läßt sich der Dissoziationsgrad der Pikrinsäure in Gegenwart von 0,15 n. Pikrat zu 0,0108 berechnen. Da Goldschmidt und Thuesen meinen, daß der Zusatz des Pikrates die Dissoziation der Pikrinsäure weit mehr zurückgedrückt haben muß, schließen sie, daß die beobachtete katalytische Wirkung hauptsächlich von der undissoziierten Pikrinsäure herrühren muß. Wenn man indessen umgekehrt aus dem gefundenen Wert des Dissoziationsgrades der Pikrinsäure den Aktivitätskoeffizienten der Ionen der Pikrinsäure in der Pikratlösung nach der Massenwirkungsgleichung:

$$\frac{f_\alpha \cdot c_K \cdot f_\alpha \cdot c_{Pikration}}{c_{Pikrinsäure}} = K$$

berechnet, erhält man

$$f_\alpha^2 \cdot 0{,}0108 \cdot 0{,}15 = 2{,}01 \cdot 10^{-4},$$

was

$$f_\alpha = 0{,}353$$

ergibt; dieser Wert ist als sehr wahrscheinlich zu bezeichnen; denn wenn man den Aktivitätskoeffizienten in Methylalkohol bei der Ionenkonzentration 0,15 aus der früher aufgestellten Formel:

$$\lg f_\alpha = -0{,}8 \cdot \sqrt[3]{c_{Ion}}$$

berechnet, erhält man

$$f_\alpha = 0{,}376.$$

Da wir bei obigen Berechnungen die katalytische Wirksamkeit der Wasserstoffionen als proportional mit deren Konzentration und von der Ionenkonzentration in der Lösung unabhängig betrachtet haben, tut die gefundene Uebereinstimmung die Berechtigung dieser Annahmen dar. Es hätte an und für sich nichts Unnatürliches dargeboten, wenn es sich gezeigt hätte, daß man mit einem Koeffizienten der katalytischen Wirksamkeit, der den Einfluß der Ionenkonzentration auf die Katalyse ausdrückte, einem Katalysekoeffizienten, rechnen müßte.

Die im vorhergehenden durchgenommenen Beispiele und viele andere ähnliche Beispiele scheinen mir als unzweifelhaft darzutun, daß es von der größten Bedeutung für die Entwicklung unserer Kenntnis der Verhältnisse der Elektrolyte sein würde, daß man bei künftigen Untersuchungen damit aufhört, mit Dissoziationsgraden zu rechnen, die aus dem Leitvermögen hergeleitet werden, wo man tatsächlich Aktivitätskoeffizienten benutzen sollte. Die mit der Anwendung von Aktivitätskoeffizienten verbundene Mühewaltung wird auf die Dauer sicherlich nicht größer sein als die mit dem Rechnen mit Leitvermögensdissoziationsgraden verbundene, wenn dieses neue Verfahren auch zu Anfang, solange noch nicht so ausführliche Tabellen über Aktivitätskoeffizienten vorliegen wie über Leitvermögen, etwas mehr Arbeit erfordern wird. Das bisherige Berechnungsverfahren mit Dissoziationsgraden wird sicherlich, solange man dabei beharrt, für die Entwicklung ein Hemmschuh sein.

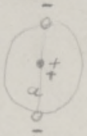
Zusammenfassung.

Es wird eine Hypothese entwickelt, wonach die starken Elektrolyte vollständig dissoziiert sind. Auf Grund der elektrischen Kräfte zwischen ihren Ionen besitzen diese bei steigender Ionenkonzentration abnehmende osmotische Wirkung, Leitvermögen und Aktivität. Diese Abnahmen finden in drei entsprechenden Koeffizienten ihren zahlenmäßigen Ausdruck. Es ist eine wichtige Aufgabe, diese Koeffizienten zu bestimmen und die Gesetze ihrer Abhängigkeit von der Zusammensetzung der Lösung und voneinander herauszufinden.

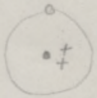
Es wird ein thermodynamischer Zusammenhang zwischen dem Aktivitätskoeffizienten und dem osmotischen Koeffizienten entwickelt und eine Annäherungsformel für den Aktivitätskoeffizienten angegeben.

Besonders der Aktivitätskoeffizient hat chemisches Interesse. Es werden an ausgewählten Beispielen die Methoden zu seiner Bestimmung entwickelt. Dabei zeigt es sich, daß die sogenannten Neutralsalzwirkungen, die Anomalien der starken Elektrolyte und die Anschauung von der katalytischen Wirkung der undissoziierten Säuremoleküle nur dadurch entstanden sind, daß man mit den Leitvermögenskoeffizienten (d. h. den alten Leitvermögensdissoziationsgraden) gerechnet hat, wo die Aktivitätskoeffizienten anzuwenden sind.

Druck von Wilhelm Knapp in Halle a. S.

He atom  $\frac{mv^2}{a} = \frac{7}{4}\frac{e^2}{a^2}$, $mav = \frac{h}{2\pi}$, $mav^2 = \frac{7}{4}e^2$, $v = \frac{7e^2 2\pi}{4h} = \frac{7\pi e^2}{2h}$, $v^2 = \frac{49}{4}\frac{\pi^2 e^4}{h^2}$

$$W_{He} = -\mathcal{E} = mv^2 = \frac{49}{4}\frac{\pi^2 m e^4}{h^2} = \frac{49}{8}W_0 = 6\frac{1}{8}W_0$$

He^+ ion  $\frac{mv^2}{a} = \frac{2e^2}{a^2}$, $mav = \frac{h}{2\pi}$, $mav^2 = 2e^2$, $v = \frac{2e^2 2\pi}{h} = \frac{4\pi e^2}{h}$, $v^2 = \frac{16\pi^2 e^4}{h^2}$

$$W_{He^+} = -\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{8\pi^2 e^4 m}{h^2} = 4W_0$$

$$\begin{array}{r} 26,22 \\ +\ 1,64 \\ \hline 27,86 \end{array}$$

Ionisierungsspannung $= W_{He} - W_{He^+} = 2\frac{1}{8}W_0 = 2\frac{1}{8}\cdot 13{,}11\ V = 27{,}86\ V$

$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{a^2}$ $mav = \frac{\cancel{2}h}{\cancel{2}\pi}$ $mav^2 = e^2$ $v = \frac{e^2\pi}{h}$ $v^2 = \frac{\pi^2 e^4}{h^2}$

$$W_{He^1_2} = -\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{8\pi^2 e^4 m}{h^2} + \frac{\pi^2 e^4 m}{h^2} = \frac{9\pi^2 e^4 m}{h^2} = 4\frac{1}{2}W_0$$

$$\begin{array}{r} 13,11 \\ 8,20 \\ \hline 21,31 \end{array}$$

$W_{He} - W_{He^1_2} = \left(6\frac{1}{8} - 4\frac{4}{8}\right)W_0 = 1\frac{5}{8}W_0 = 1\frac{5}{8}\cdot 13{,}11\ V = 21{,}31\ V$ $= 56{,}0\ \mu\mu$

$$\begin{array}{r} 3,29 \\ 2,06 \\ \hline 5,35 \end{array}$$

$1\frac{5}{8}W_0 = h\nu$, $\nu = 1\frac{5}{8}\frac{W_0}{h} = 1\frac{5}{8}\cdot 3{,}29\cdot 10^{15} = 5{,}35\cdot 10^{15}$ $\lambda_0 = \frac{3\cdot 10^{10}}{5{,}35\cdot 10^{15}} = 0{,}560\cdot 10^{-5}$

Doch $\lambda_0 = 48{,}5\ \mu\mu$ [illegible]

$\frac{e}{m} = 1{,}08\cdot 10^7$

$W_0 = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^2}$ Arbeit um Wasserstoffatom in pos. Kern u. neg. El. zu spalten

$$W_{H_2} = \frac{4\pi^2 m e^4\, 1{,}05^2}{h^2} = 2\cdot 1{,}05^2\, W_0 = 2{,}2\, W_0$$

$N = 6{,}08\cdot 10^{23}$

$W_{H^-} = \frac{9}{8} W_0$ $\quad W_0 = hR = 6{,}57\cdot 10^{-27}\cdot 3{,}29\cdot 10^{15} = 2{,}164\cdot 10^{-11}$ erg $\quad NW_0 = 1{,}313\cdot 10^{13}$ erg

" $= 3{,}14\cdot 10^{5}$ cal

$H_2 = 2H \quad (2{,}2-2)W_0 = 0{,}2\, W_0 = 2{,}625$ V $\quad \frac{2{,}164\cdot 10^{-11}}{4{,}774\cdot 10^{-10}} = 4{,}37\cdot 10^{-2}\cdot 300 = 13{,}11$ Volt

$H_2 = H^+ + H^- \quad (2{,}2 - \frac{9}{8})W_0 = \frac{2{,}200}{\underline{1{,}125}}\, 1{,}075\, W_0 = 14{,}1$ V

Ionisierungsspannung des H-atoms $J_0 = 13{,}1$ V

Elektronenaffinität " " $\frac{1}{8} J_0 = 1{,}64$ V

Dissoziationsarbeit des H_2 Moleküls $0{,}2\, J_0 = 2{,}62$ V

Ionisierungsarbeit $H_2 = H^+ + H^-$ $= 14{,}1$ V

$$\begin{array}{r} 13{,}11 \\ +2{,}62 \\ \hline 15{,}73 \\ -1{,}64 \\ \hline 14{,}09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1{,}1176 \\ -1{,}0403 \\ \hline 0{,}0773 \end{array}$$

$\nu_0 = 109722 \quad \nu = x$ $\quad$ (1,195 V)

$J_0 = 13{,}11$ V $\quad J = \frac{x}{10000}\,\frac{13{,}11}{10{,}9722} = \frac{x}{10000}\cdot 1{,}2$ V

~~S. 1 [illegible] Zeitschr. 1918 [illegible]~~ +)

~~S. 2 Für diese Annahme ... Grund*) *) [illegible]~~ [illegible]

~~S. 3 ganz unhaltbar~~

S. 4 Z. 1. Gases, Wasserstoff oder Sauerstoff,

Z. 3 Teil, ~~in~~ deren ~~[illegible]~~ ein etwas verschiedene~~n~~ ~~schweren~~ Isotopengehalte aufweisen ~~[illegible]~~

Z. 6 sind ihre spez. Gewichte verschieden*). Wir hätten also bei Isotopen Wasser von schwerem spez. Gewicht als ~~[illegible]~~ dem das gewöhnliche Wasser erhalten müssen. *) Isotopen

Z. 8 sie zunächst benannt, ein .. Komponenten mit verschiedenem Molekulargewicht

S. 7

+) Die Arbeit wurde August–Nov. 1918 im [illegible] ausgeführt. Herrn Geh. Rat [illegible] ~~[illegible]~~ bin ich für die hierzu erteilte Erlaubnis ~~und~~ sowie sein [illegible] und fördernde[s] Interesse an der Arbeit ~~[illegible]~~ zu großem Dank verpflichtet. Auch möchte ich [illegible] für mehrfache Hilfeleistung bei den Versuchen meinen besten Dank aussprechen.

Bei Bohr nach Arbeit von Lorentz erkundigen wonach bei regelmässig angeordneten Molekülen keine Zerstreuung des Lichtes stattfindet

Quantentheorie d. Magnetismus, Zusammenhang zum Atom b. spez. Wärm.

73/ Allerdings ~~gibt es~~ sprechen auch Gründe ~~die~~ gegen diese Annahme ~~sprechen~~, ~~Jedenfalls ist der Radius der ergibt sich der Kern ... nach obiger Theorie~~ von denen der gewichtigste folgender ist. Nach Bohr müsste für ein isotopes H-Atom vom Gewicht 2 die Rydbergsche Konstante zufolge der Mitbewegung des Kerns einen um 0,027% höheren Wert haben als für ~~gewöhnlichen~~ Wasserstoff vom Gewicht 1. Würde also der gewöhnliche ~~Wasser~~ in der Natur vorkommende Wasserstoff 0,8% isotope H-atome vom doppelten ~~Atom~~gewicht enthalten, so müsste jede Wasserstofflinie von der Wellenlänge λ von einer Komponente im Abstande $\frac{d\lambda}{\lambda} = 2{,}7 \cdot 10^{-4}$ begleitet sein, deren Intensität 0,8% der Intensität der gewöhnlichen Linie betragen müsste. V Es scheint uns nicht unmöglich, dass ~~diese Komponente~~ sie wegen ihrer geringen Intensität bei der bekannten Diffusität der Wasserstofflinien bisher der Beobachtung entgangen ~~war~~ sein könnte.

Schliesslich scheint es uns, ganz abgesehen von jeder speziellen Theorie, wichtig ~~zu prüfen~~ ~~ob~~ die einmal durch eine ~~reine exakte~~ Hyp... einwandfrei festzustellen, ob die Abweichung der Atomgewichte von der Ganzzahligkeit allein durch Isotopie erklärt werden könnte.

V diese Bemerkung ist ~~hier~~ wiedergegeben worden.

$$\nu = N\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) \quad \nu = 4N\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)$$

$$N_H^{I} = N_\infty\left(1-\frac{1}{1844}\right)$$

$$N_H^{II} = N_\infty\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{1844}\right) \quad \underline{N_H^{II}-N_H^{I}}$$

$$N_H^{II}-N_H^{I} = N_\infty\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{1844}\right) = N_H^{I}$$

$$N_H^{I} = \frac{N_\infty}{1+\frac{\mu}{m}} \quad N_H^{II} = \frac{N_\infty}{1+\frac{\mu}{2m}}$$

$$N_H^{II}-N_H^{I} = N_\infty\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\varepsilon}-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)$$

$$= N_H^{I}\frac{1}{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\varepsilon}-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)$$

$$\frac{N_H^{II}-N_H^{I}}{N_H^{I}} = \frac{1+\varepsilon-1-\frac{1}{2}\varepsilon}{(1+\frac{1}{2}\varepsilon)(1+\varepsilon)^2} = \frac{\cancel{1}\,\frac{1}{2}\varepsilon}{(1+\frac{1}{2}\varepsilon)(1+2\varepsilon)}$$

$$= \frac{\cancel{1}\,\frac{1}{2}\varepsilon}{1+\frac{1}{2}\varepsilon+2\varepsilon} = \left(\cancel{1}\,\frac{1}{2}\varepsilon\right)\left(1-\frac{5}{2}\varepsilon\right)$$

$$= \cancel{1}\,\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{5}{2}\varepsilon^2 = 1-2\varepsilon$$

$$N_H^{II}-N_H^{I} = N_H^{I}\left(\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{5}{2}\varepsilon^2\right), \quad N_H^{II} = N_H^{I}\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{5}{2}\varepsilon^2\right)$$

$$\varepsilon = 0{,}000541 \quad \frac{1}{2}\varepsilon = 0{,}027\,\%$$

$$N_H^{I} = \frac{N_\infty}{1+\frac{\mu}{m}}, \quad N_H^{II} = \frac{N_\infty}{1+\frac{1}{2}\frac{\mu}{m}}, \quad \frac{N_H^{II}}{N_H^{I}} = \frac{1+\frac{\mu}{m}}{1+\frac{1}{2}\frac{\mu}{m}}, \quad \frac{N_H^{II}-N_H^{I}}{N_H^{I}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\mu}{m}}{1+\frac{1}{2}\frac{\mu}{m}}$$

Ziel der Physik ist die Erhaltung des Invarian-
ten, Inhaltlichen (Hegel, Marburger Schule), das ist
natürlich einen Idee. ~~das ist~~ die einzige Möglich-
keit ~~zur~~ zur Lösung dieser Aufgabe ist die
zu bemerken, daß
der Welt, wie sie ist, ~~als~~ die einzig denkbare,
einzig mögliche ~~zu~~ [illegible] ist, ~~ihr Mittel~~ dann
ist ~~jedes~~ nichtinvariante, nicht aus ~~[illegible]~~ dem Denken
stammende Moment ausgeschaltet. Ein
Mittel hierzu ist das disjunktive Urteil.
Man konstruiert alle möglichen denkbaren
Welten, d. h. man setzt ~~die [illegible]~~ spricht
das Urteil aus, die Welt ist entweder so
oder so oder so .... Dann zeigt man Invariant
daß alle diese Welten der Beobachtung dem
als eine und dieselbe, als die wirkliche Welt
erscheinen (Einsteins gleichberechtigte Koordinaten-
systeme, Boltzmanns Ergodenhypothese

$pV = nRT$, $U = \frac{3}{2} nRT$, $S = nR\left(\frac{5}{2}\ln T - \ln p + \frac{5}{2} + \ln\frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{5}{2}}}{h^3}\right)$

$$\bar{\Phi} = S - \frac{U+pV}{T} = nR\left(\frac{5}{2}\ln T - \ln p + \ln\frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{5}{2}}}{h^3}\right)$$

fürs Metall: $\bar{\Phi}_m = S_m - \frac{U_m + pV_m}{T}$

$\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n}\right)_{p,T} = \left(\frac{\partial \bar{\Phi}_m}{\partial n}\right)_{p,T}$, $pV_m \ll U_m$ weil p klein, $\bar{\Phi}_m = -\frac{F_m}{T}$ F freie Energie

„Elektronenaffinität" $\mu = \left(\frac{\partial F_m}{\partial n}\right)_{p,T}$, $\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial n}\right) = -\frac{\mu}{T}$

$$p = \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}} k^{\frac{5}{2}}}{h^3} T^{\frac{5}{2}} e^{\frac{\mu}{RT}} \qquad \varrho_g = \varepsilon \frac{p}{RT}$$

$\mathcal{E} = \frac{3}{2}\frac{e^2}{r}$ $r = \frac{3}{2}\frac{e^2}{\mathcal{E}}$ $e = 4{,}77_4 \cdot 10^{-10}$

$r = \frac{21{,}48_5}{v} 10^{-8}$

$\mathcal{E} = e\frac{v}{300}$ $r = \frac{3}{2}\frac{e}{v} 300,$ $r = \frac{4{,}5 \cdot 4{,}77_4 \cdot 10^{-8}}{v}$

$$\begin{array}{r} 19{,}096 \\ 2{,}387 \\ \hline 21{,}48_3 \end{array}$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{1+\frac{a^2}{r^2}-2\frac{a}{r}\cos\psi} = \int_0^{2\pi} d\psi - \frac{a^2}{r^2}\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2\psi)\,d\psi - \frac{a^4}{r^4}\int_0^{2\pi}(1+12\cos^2\psi-16\cos^4\psi)\,d\psi$$
$$- \frac{a^6}{r^6}\int_0^{2\pi}(1-24\cos^2\psi+80\cos^4\psi-64\cos^6\psi)\,d\psi$$

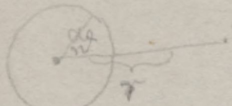
$$\int_0^{2\pi}\cos^n\psi\,d\psi = \frac{\sin\psi\cos^{n-1}\psi}{n}\Big|_0^{2\pi} + \frac{n-1}{n}\int_0^{2\pi}\cos^{n-2}\psi\,d\psi = \frac{n-1}{n}\int_0^{2\pi}\cos^{n-2}\psi\,d\psi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\psi\,d\psi = \frac12\,2\pi \qquad \int_0^{2\pi}\cos^4\psi\,d\psi = \frac34\,\frac12\,2\pi \qquad \int_0^{2\pi}\cos^6\psi\,d\psi = \frac56\,\frac34\,\frac12\,2\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}\psi\,d\psi = \frac{(2n-1)}{2n}\,\frac{(2n-3)}{(2n-2)}\cdots\frac34\,\frac12\,2\pi = \frac{(2n-1)!}{2n[2(n-1)]^2}\,2\pi$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{1+\frac{a^2}{r^2}-2\frac{a}{r}\cos\psi} = 2\pi\Big[1-\frac{a^2}{r^2}\big(1-4\cdot\tfrac12\big)-\frac{a^4}{r^4}\big(1+\underset{+6}{12\cdot\tfrac12}-\underset{-6}{16\cdot\tfrac34\cdot\tfrac12}\big)-\frac{a^6}{r^6}\big(1-\underset{-12}{24\tfrac12}+\underset{+30}{80\tfrac34\tfrac12}\underset{-20}{-64\tfrac56\tfrac34\tfrac12}\big)\Big]$$
$$= 2\pi\Big[1+\frac{a^2}{r^2}+\frac{a^4}{r^4}+\frac{a^6}{r^6}\cdots\Big]$$

$$\mathfrak{K} = \frac{e}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{a^2+r^2-2ar\cos\psi} = \frac{e}{r^2}\Big(1-3\frac{a^2}{r^2}-13\frac{a^4}{r^4}-63\frac{a^6}{r^6}\cdots\Big)$$



$$\mathfrak{K} = -\frac{dV}{dr} \qquad V = \int_0^{2\pi}\frac{\frac{e}{2\pi a}\,ds}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\vartheta}} = \frac{e}{2\pi}\,\frac1r\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{(1-2\varrho\cos\vartheta+\varrho^2)^{\frac12}}$$

$$\varrho = \frac ar < 1 \qquad \int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{(1-2\varrho\cos\vartheta+\varrho^2)^{\frac12}} = 2\pi\Big[1+\Big(\frac12\Big)^2\varrho^2+\Big(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\Big)^2\varrho^4+\cdots\Big]$$

$$V = \frac er + \Big(\frac12\Big)^2\frac{a^2e}{r^3} + \Big(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\Big)^2\frac{a^4e}{r^5}+\cdots \qquad \mathfrak{K} = \frac{e}{r^2}+\frac34\,\frac{a^2e}{r^4}+\frac{45}{64}\,\frac{a^4e}{r^6}+\cdots$$

$$\mathfrak{K} = \frac{e}{r^2}\Big(1+\frac34\,\frac{a^2}{r^2}+\frac{45}{64}\,\frac{a^4}{r^4}+\cdots\Big)$$

$$\cancel{\varrho = \frac ar} < 1$$

$$\mathfrak{K} = \frac{e}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{a^2+r^2-2ar\cos\vartheta} = \frac{e}{2\pi}\,\frac{1}{r^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{1-2\frac ar\cos\vartheta+\left(\frac ar\right)^2} = \frac{e}{r^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{1-2\varrho\cos\vartheta+\varrho^2}$$

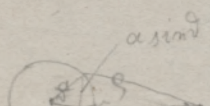
$$(1-\varepsilon)^{-1} = 1+\varepsilon+\varepsilon^2\cdots, \quad (1-\varepsilon)(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots) = 1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots-\varepsilon-\varepsilon^2-\cdots = 1$$

$$\varepsilon = \varrho(2\cos\vartheta-\varrho) \qquad \frac{1}{1-2\varrho\cos\vartheta+\varrho^2} = 1+\varrho(2\cos\vartheta-\varrho)+\varrho^2(2\cos\vartheta-\varrho)^2+\varrho^3(2\cos\vartheta-\varrho)^3+\varrho^4(2\cos\vartheta-\varrho)^4$$

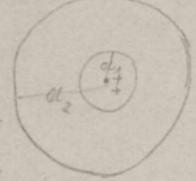
$$= 1+2\varrho\cos\vartheta-\varrho^2+\varrho^2 4\cos^2\vartheta-4\varrho^3\cos\vartheta+\varrho^4+8\varrho^3\cos^3\vartheta-12\varrho^4\cos^2\vartheta+16\varrho^4\cos^4\vartheta$$

$$= 1+\varrho^2(4\cos^2\vartheta-1)+\varrho^4(1-4\cos^2\vartheta+16\cos^4\vartheta)$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{1-2\varrho\cos\vartheta+\varrho^2} = 2\pi\Big[1+\varrho^2\big(4\cdot\tfrac12-1\big)+\varrho^4\big(1-\underset{6}{12\cdot\tfrac12}+\underset{6}{16\cdot\tfrac38}\big)+\cdots\Big]$$
$$= 2\pi(1+\varrho^2+\varrho^4\cdots)$$



$$\mathfrak{K} = \frac{\frac{e}{2\pi a}\,ds}{\varrho^2}\cdot\boxed{\frac{\sqrt{\varrho^2-a^2\sin^2\vartheta}}{\varrho}}$$



$$K = \frac{e^2}{r^2}\left(1+\frac{3}{4}\frac{a^2}{r^2}+\frac{45}{64}\frac{a^4}{r^4}+\cdots\right) = \frac{e^2}{r^2}\left[1+3\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{a^2}{r^2}+5\left(\frac{3\cdot1}{2\cdot4}\right)^2\frac{a^4}{r^4}+\cdots\right]$$

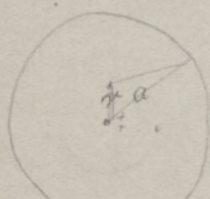
$$\frac{mv_2^2}{a_2} = \frac{2e^2}{a_2^2} - \frac{e^2}{a_2^2}\left(1+\frac{3}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}+\frac{45}{64}\frac{a_1^4}{a_2^4}+\cdots\right)$$

$$mv_2^2 = \frac{e^2}{a_2}\left(1-\frac{3}{4}\frac{a_1^2}{a_2^2}\right) \quad a_1 = \frac{a_0}{2} \quad a_2 = 4a_0 \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{8}$$

$$mv_2^2 a_2 = e^2\left(1-\frac{3}{64}\right)$$

$$mv^2a = e^2k \quad mva = \frac{nh}{2\pi}, \quad v = \frac{e^2k2\pi}{nh} \quad W = \frac{m}{2}v^2 = \frac{e^4k^24\pi^2m}{2n^2h^2} = \frac{k^2}{n^2}W_0$$

$$W = \frac{\left(1-\frac{3}{64}\right)^2}{Q^2}W_0$$



$$V = \frac{e}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{ds}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\vartheta}} = \frac{e}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{(1-2\varrho\cos\vartheta+\varrho^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \varrho = \frac{a}{r} > 1$$

$$(1-2\varrho\cos\vartheta+\varrho^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r}P_0(\cos\vartheta)+\frac{1}{r^2}P_1(\cos\vartheta)+\frac{1}{r^3}P_2(\cos\vartheta)+$$

$$= \frac{1}{r}+\frac{1}{r^2}\cos\vartheta+\frac{1}{r^3}\frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta-1)+$$

$$V = \frac{e^2}{r^2}\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi}d\vartheta+\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\, d\vartheta+\frac{1}{r^2}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(3\cos^2\vartheta-1)\,d\vartheta+\cdots\right)$$

$$= \frac{e^2}{r^2}\left[1+\frac{1}{r^2}\frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{1}{2}-1\right)+\cdots\right] = \frac{e^2}{\varrho^2}\left(1+\frac{1}{4}\frac{1}{\varrho^2}\right) = e^2\left(\frac{a^2}{r^2}+\frac{1}{4}\frac{a^4}{r^4}\right)$$

$$K = -\frac{dV}{dr} = e^2\left(\frac{2a^2}{r^3}+\frac{a^4}{r^5}\right)$$

$$\frac{mv_1^2}{a_1} = \frac{2e^2}{a_1^2}+\frac{e^2}{a_1^2}\left(\frac{2a_2^2}{a_1}+\frac{a_2^4}{a_1^3}\right)$$

$$V_{12} = \frac{e^2}{a_2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^4+\cdots\right] \quad a_1 > a_2$$

$$K_2 = -\frac{\partial V_{12}}{\partial a_2} = \frac{e^2}{a_2^2}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 3\left(\frac{a_1^2}{a_2}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 5\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^4+\cdots\right]$$

$$K_1 = -\frac{\partial V_{12}}{\partial a_1} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 2\frac{a_1e^2}{a_2^3}-\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 4\frac{a_1^3e^2}{a_2^5}+\cdots = -\frac{e^2}{a_1^2}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 4\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^5+\cdots\right]$$

$$\frac{mv_2^2}{a_2} = \frac{2e^2}{a_2^2}-\frac{e^2}{a_2^2}\left(1+\frac{3}{4}\alpha^2+\frac{45}{64}\alpha^4+\cdots\right) = \frac{e^2}{a_2^2}\left[1-\frac{3}{4}\alpha^2-\frac{45}{64}\alpha^4-\cdots\right] = \frac{e^2}{a_2^2}k_2 = \frac{e^2}{a_2^2}(1-\varepsilon_2)$$

$$\frac{mv_1^2}{a_1} = \frac{2e^2}{a_1^2}+\frac{e^2}{a_1^2}\left(\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{9}{16}\alpha^5+\cdots\right) = \frac{e^2}{a_1^2}\left[2+\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{9}{16}\alpha^5-\cdots\right] = \frac{e^2}{a_1^2}k_1 = \frac{e^2}{a_1^2}(2+\varepsilon_1)$$

$$\frac{mv^2}{a} = \frac{e^2}{a^2}k, \quad mv^2a = e^2k, \quad mva = \frac{nh}{2\pi}, \quad v = \frac{e^2k2\pi}{nh}, \quad a = \frac{nh}{2\pi mv} = \frac{n^2h^2}{(2\pi)^2me^2k}$$

$$v_0 = \frac{2\pi e^2}{h} \quad v = \frac{k}{n}v_0 \quad T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{k^2 2\pi^2e^4m}{n^2\ h^2} = \frac{k^2}{n^2}W_0, \quad a_0 = \frac{h^2}{(2\pi e)^2m}, \quad a = \frac{n^2}{k}a_0$$

$$\frac{e^2}{a_0} = \frac{4\pi^2e^4m}{h^2} = 2W_0 \qquad W_0 = \frac{2\pi^2e^4m}{h^2} = Nh$$

$$\mathcal{E} = T+V = -W \quad T = \frac{m}{2}(v_1^2+v_2^2) = \left(k_1^2+\frac{k_2^2}{4}\right)W_0$$

$$V = V_1+V_2+V_{12} \quad V_1 = -\frac{2e^2}{a_1} \quad V_2 = -\frac{2e^2}{a_2} \quad V_{12} = \frac{e^2}{a_2}\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{9}{64}\alpha^4+\cdots\right)$$

$$a_1 = \frac{1}{k_1}a_0 \quad a_2 = \frac{4}{k_2}a_0 \quad k_1 = 2+\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{9}{16}\alpha^5+\cdots \quad k_2 = 1-\frac{3}{4}\alpha^2-\frac{45}{64}\alpha^4-\cdots$$

$$\frac{1}{a_1} = \frac{k_1}{a_0}, \quad \frac{1}{a_2} = \frac{k_2}{4a_0} \quad V_1 = -\frac{e^2}{a_0}2k_1 \quad V_2 = -\frac{e^2}{a_0}\frac{k_2}{2} \quad V_{12} = \frac{e^2}{a_0}\frac{k_2}{4}\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{9}{64}\alpha^4+\cdots\right)$$

$$V = -\frac{e^2}{a_0}\left[2k_1+\frac{k_2}{2}-\frac{k_2}{4}\left(1+\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{9}{64}\alpha^4+\cdots\right)\right] \quad \frac{e^2}{a_0} = 2W_0$$

$$V = -2W_0\left[2k_1+\frac{k_2}{4}-\frac{k_2}{4}\left(\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{9}{64}\alpha^4+\cdots\right)\right]$$

$$W = -V-T = W_0\left[4k_1+\frac{k_2}{2}-\frac{k_2}{2}\left(\frac{1}{4}\alpha^2+\frac{9}{64}\alpha^4+\cdots\right)-k_1^2-\frac{k_2^2}{4}\right]$$

$$\lim_{\alpha=0}k_1 = 2 \quad \lim_{\alpha=0}k_2 = 1 \quad \lim_{\alpha=0}W = W_0\left(8+\frac{1}{2}-4-\frac{1}{4}\right) = 4\frac{1}{4}W_0$$

$$k_1 = 2+\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{9}{16}\alpha^5+$$
$$k_2 = 1-\frac{3}{4}\alpha^2-\frac{45}{64}\alpha^4-$$

W bis auf α^2

$$4k_1 = 8$$
$$\frac{k_2}{2} = \frac{1}{2}-\frac{3}{8}\alpha^2$$
$$-\frac{k_2}{2}(\ ) = -\frac{1}{8}\alpha^2$$
$$-k_1^2 = -4$$
$$-\frac{k_2^2}{4} = -\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\alpha^2$$

$$W = \left(4\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\alpha^2\right)W_0$$

W bis auf α^5

$$4k_1 = 8 \quad +2\alpha^3 \quad +\frac{9}{4}\alpha^5$$
$$\frac{k_2}{2} = \frac{1}{2}-\frac{3}{8}\alpha^2 \quad -\frac{45}{128}\alpha^4$$
$$-\frac{k_2}{2}(\ ) = -\frac{1}{8}\alpha^2 \quad +\frac{12}{128}+\frac{3}{32}\alpha^4 \quad -\frac{9}{128}\alpha^4$$
$$-k_1^2 = -4 \quad -2\alpha^3 \quad -\frac{9}{4}\alpha^5$$
$$-\frac{k_2^2}{4} = -\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\alpha^2 \quad +\frac{45}{128}\alpha^4 \quad -\frac{13}{128} \quad -\frac{9}{64}\alpha^4$$

$$W = \left(4\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\alpha^2-\frac{15}{128}\alpha^4\right)W_0$$

$k_1 = 2+\varepsilon$
$4k_1 = 8+4\varepsilon$
$k_1^2 = 4+4\varepsilon$

$(2+0{,}009)^2 = 4{,}036081$
$27174 \cdot 4 \quad \lg 4 \cdot 174 = 0{,}4342$
$108696 \quad \lg 8{,}05608 = 0{,}5573-2$
$+980{,}1 \qquad 2{,}9915$
$109676{,}6$
$27419{,}4$
109676

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{8} \quad W = \left(4\frac{1}{4}-\frac{1}{8^3}\right)W_0 \quad \frac{1}{4}-\frac{1}{8^3} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{128}\right) = \frac{1}{4\left(1+\frac{1}{128}\right)} = \frac{1}{4+\frac{1}{32}} = \frac{1}{\left(2+\frac{1}{128}\right)^2}$$

$$\alpha = \frac{a_1}{a_2} = \frac{k_2}{4k_1} = \frac{1-\frac{3}{4}\alpha^2-\frac{45}{64}\alpha^4}{8+2\alpha^3+\frac{9}{4}\alpha^5} = \frac{1}{8}-\frac{3}{32}\alpha^2-\frac{1}{32}\alpha^3-\frac{45}{512}\alpha^4-\frac{3}{256}\alpha^5$$

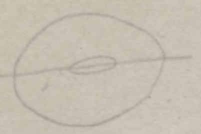
$$1-\frac{3}{4}\alpha^2-\frac{45}{64}\alpha^4$$
$$-1\ \mp\frac{1}{4}\alpha^3\mp\frac{9}{32}\alpha^5$$
$$-\frac{3}{4}\alpha^2-\frac{1}{4}\alpha^3-\frac{45}{64}\alpha^4-\frac{9}{32}\alpha^5$$
$$\pm\frac{3}{4}\alpha^2 \qquad \pm\frac{3}{16}\alpha^5$$
$$-\frac{1}{4}\alpha^3-\frac{45}{64}\alpha^4-\frac{3}{32}\alpha^5$$
$$\pm\frac{1}{4}\alpha^3$$
$$-\frac{45}{64}\alpha^4-\frac{3}{32}\alpha^5$$

$$-\frac{45}{64}\alpha^4-\frac{3}{32}\alpha^5$$
$$\pm\frac{45}{64}\alpha^4$$
$$-\frac{3}{32}\alpha^5$$

$$\frac{1}{}$$

$\frac{1}{4}-\frac{1}{512} = 0{,}25000$
$-0{,}00195$
$0{,}24805$
$\lg 1 = 0{,}0000 \quad ,104646$
$-\lg 8^{11} = -3{,}7093 \quad 24805$
$0{,}2907-3 \quad \frac{2400}{2720}$
$\lg 676 = 3{,}9557$
$+\lg 0{,}248 = 0{,}3946-1$
33803

$$\alpha = \frac{1}{8}-\frac{3}{32}\alpha^2-\frac{1}{32}\alpha^3-\frac{45}{512}\alpha^4-\frac{3}{256}\alpha^5$$



$\vartheta = \frac{\pi}{2}$ $\cos\vartheta = 0$ $\cos\Theta = \cos\varphi\cos\psi$

$$V_{12} = \frac{e^2}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\varphi\cos\psi}} \qquad a_2 > a_1 \quad \frac{a_1}{a_2} = \varrho$$

$$V_{12} = \frac{e^2}{(2\pi)^2 a_2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{(1+\varrho^2-2\varrho\cos\varphi\cos\psi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(1+\varrho^2-2\varrho\cos\Theta)^{-\frac{1}{2}} = 1+\varrho^2\frac{1}{2}(3\cos^2\varphi\cos^2\psi-1)+\varrho^4\frac{1}{8}(35\cos^4\varphi\cos^4\psi-30\cos^2\varphi\cos^2\psi+3)$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{(1+\varrho^2-2\varrho\cos\varphi\cos\psi)^{\frac{1}{2}}} = 2\pi\left[1+\varrho^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\varphi\frac{1}{2}-1\right)+\varrho^4\frac{1}{8}\left(35\cos^4\varphi\frac{3}{4}\frac{1}{2}-30\cos^2\varphi\frac{1}{2}+3\right)\right]$$

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}\frac{d\psi}{(1+\varrho^2-2\varrho\cos\varphi\cos\psi)^{\frac{1}{2}}} = (2\pi)^2\left[1+\varrho^2\frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-1\right)+\varrho^4\frac{1}{8}\left(35\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{3}{4}-30\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+3\right)\right]$$

$$\frac{35\cdot 9-30\cdot 16+3\cdot 64}{64} \qquad \begin{array}{r} 315 \\ +192 \\ \hline 507 \\ -480 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$V_{12} = \frac{e^2}{a_2}\left[1-\frac{1}{8}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2+\frac{27}{8^3}\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^4\cdots\right]$$

Li

$p_1 = 2$ $p_2 = 1$ $\frac{W}{W_0} = 2\left(3-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}+R_1+R_2$ $\frac{16\cdot 7}{112}$ $\frac{1}{(2-\varepsilon)^2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\varepsilon$ $\varepsilon = \frac{1}{234}$ [illegible] $\varepsilon = \frac{1}{25}$

$Z_1 = 2\frac{3}{4}$ $Z_2 = 1$

$$R_1 = \frac{1}{4}\,2\,\frac{1}{2^6}\frac{1}{(3-\frac{1}{4})^2} = \frac{1}{2^7}\frac{1}{7\frac{5}{16}} = \frac{1}{8\cdot 16\cdot 7\frac{5}{16}} = \frac{1}{8(112+5)} = \frac{1}{8\cdot 117} = \frac{1}{936}$$

$$\frac{1}{(n-\varepsilon)^2} = \frac{1}{n^2(1-\frac{2\varepsilon}{n})} = \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{2\varepsilon}{n}\right) = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}\varepsilon \qquad R_1 = \frac{1}{4}\,2\,\frac{1}{n^6}\frac{1}{(3-\frac{1}{4})^2} = \frac{2}{n^6}\frac{1}{4}\frac{1}{7\frac{5}{16}} = \frac{2}{n^3}\frac{1}{n^3}\frac{1}{29\frac{1}{4}}$$

$\varepsilon = \frac{1}{n^3\, 29\frac{1}{4}}$ $n=2$ $\varepsilon = \frac{1}{234}$ statt $\frac{1}{25}$ $n=3$ $\varepsilon = \frac{1}{27\cdot 30} = \frac{1}{800}$ statt $\frac{1}{500}$

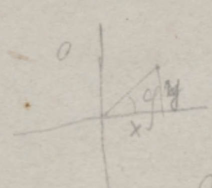
He

$R_1 = \frac{1}{4}\frac{1}{n^6}\frac{1}{4} = \frac{2}{n^3}\frac{1}{n^3 32}$ $\varepsilon = \frac{1}{n^3 32}$ $n=2$ $\varepsilon = \frac{1}{256}$ statt $\frac{1}{14}$ $n=3$ $\varepsilon = \frac{1}{27\cdot 32} = \frac{1}{900}$ statt $\frac{1}{400}$

$$\mathcal{K} = \frac{e^2}{r^2}\left(1+\frac{9}{4}\varrho^2\cos^2\varphi-\frac{3}{2}\varrho^2\right) = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

$V_{\parallel} = \frac{e^2}{r^2}\left[1+\frac{a^2}{r^2}\frac{1}{2}\left(3\,\frac{1}{2}-1\right)\right.$

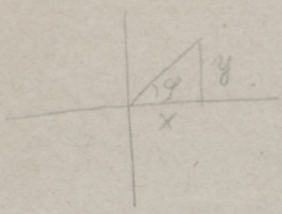
$V_{\perp} = \frac{e^2}{r}\left[1+\frac{a^2}{r^2}\frac{1}{2}(3\cos^2\varphi-1)\right.$



$\cos\varphi = \frac{x}{r}$ $\cos^2\varphi = \frac{x^2}{r^2}$

$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e^2}{r^2}\frac{x}{r}$ $m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e^2}{r^2}\frac{y}{r}$

$$\mathcal{K}_{\perp} = \frac{e^2}{r^2}\left[1+\frac{a^2}{r^2}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi-1\right)\right]$$



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}m\dot{x} = -\frac{e^2}{r^2}\cos\varphi, \quad \frac{d}{dt}m\dot{y} = -\frac{e^2}{r^2}\sin\varphi \qquad p = mr^2\dot{\varphi}$$

$$R = -\frac{e^2}{r^2}(1-\beta+\alpha\cos^2\varphi) = -\frac{e^2(1-\beta)}{r^2}\left(1+\frac{\alpha}{1-\beta}\cos^2\varphi\right) = \frac{e^2}{r^2}(1+\gamma\cos^2\varphi)$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = -\frac{e^2}{r^2}(\cos\varphi+\gamma\cos^3\varphi) \qquad \frac{d}{dt}m\dot{y} = -\frac{e^2}{r^2}(\sin\varphi+\gamma\sin\varphi\cos^2\varphi)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi} = \frac{p}{mr^2}\frac{d}{d\varphi} \qquad \frac{1}{r} = \sigma \qquad \frac{d\sigma}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$$

$$m\dot{x} = \frac{p}{r^2}\frac{d}{d\varphi}(r\cos\varphi) = \frac{p}{r^2}\left(-r\sin\varphi+\frac{dr}{d\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$= -p\left(\sigma\sin\varphi+\frac{d\sigma}{d\varphi}\cos\varphi\right)$$

$$m\dot{y} = -p\left(\sigma\cos\varphi-\frac{d\sigma}{d\varphi}\sin\varphi\right)$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = -\frac{p^2}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\sigma\sin\varphi+\frac{d\sigma}{d\varphi}\cos\varphi\right) = -\frac{p^2}{mr^2}\Big(\sigma\cos\varphi+\sin\varphi\frac{d\sigma}{d\varphi} -$$

$$-\frac{d\sigma}{d\varphi}\sin\varphi+\cos\varphi\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}\Big) = -\frac{p^2}{mr^2}\cos\varphi\left(\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}+\sigma\right) = -\frac{e^2}{r^2}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = -\frac{p^2}{mr^2}\cos\varphi\left(\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}+\sigma\right) = -\frac{e^2}{r^2}\cos\varphi(1+\gamma\cos^2\varphi)$$

$$\frac{p^2}{m}\left(\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}+\sigma\right) = e^2(1+\gamma\cos^2\varphi)$$

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2}+\sigma = \frac{me^2}{p}(1+\gamma\cos^2\varphi)$$

$T = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) \quad V = -\frac{e^2}{r}$

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi$

$\dot x = -r\dot\varphi\sin\varphi + \dot r\cos\varphi \quad \dot x^2 = r^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi - 2r\dot r\dot\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \dot r^2\cos^2\varphi$

$\dot y = r\dot\varphi\cos\varphi + \dot r\sin\varphi \quad \dot y^2 = r^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi + 2r\dot r\dot\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \dot r^2\sin^2\varphi$

$T = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) = (r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2)\frac{m}{2} \quad V = -\frac{e^2}{r}$

$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot r} = m\dot r \quad \dot r = \frac{p_r}{m} \quad \dot\varphi = \frac{p_\varphi}{mr^2} \quad E = T + V$

$p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = mr^2\dot\varphi \quad T = \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{p_r^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_r^2\right)$

$m\frac{d^2x}{dt^2} = X \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y \quad \frac{X}{Y} = \frac{x}{y}, \; yX = xY, \; xY - yX = 0$

$-y\frac{d^2x}{dt^2} + x\frac{d^2y}{dt^2} = 0 = \frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$

$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \text{konst}$

$x = r\cos\varphi \quad \frac{dx}{dt} = -r\sin\varphi\cdot\dot\varphi + \dot r\cos\varphi \;\Big|\; -r\sin\varphi$

$y = r\sin\varphi \quad \frac{dy}{dt} = r\cos\varphi\cdot\dot\varphi + \dot r\sin\varphi \;\Big|\; r\cos\varphi$

$r^2\dot\varphi = \text{konst} \quad mr^2\dot\varphi = p \quad \frac{m}{2}(r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2) - \frac{e^2}{r} = U$

$\dot\varphi = \frac{p}{mr^2} \quad \dot\varphi^2 = \frac{p^2}{m^2r^4}, \; \frac{p}{2m}\frac{1}{r^2} - e^2\frac{1}{r} + \frac{m}{2}\dot r^2 = U$

$mr^2\dot\varphi = p, \; \frac{m}{2}(r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2) - \frac{e^2}{r} = U$

$r = r_0 \quad \dot\varphi = \dot\varphi_0 \quad \dot r = 0 \quad m r_0^2\dot\varphi_0 = p, \; \frac{m}{2}r_0^2\dot\varphi_0^2 - \frac{e^2}{r_0} = U$

$r = r_0 + \varrho, \; \dot\varphi = \dot\varphi_0 + \varepsilon \quad \dot r = \dot\varrho$

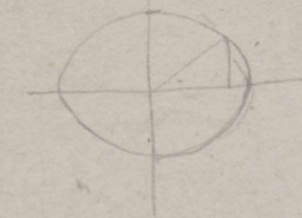
$m(r_0^2 + 2r_0\varrho)(\dot\varphi_0 + \varepsilon) = p = m r_0^2\dot\varphi_0 + 2m r_0\varrho\dot\varphi_0 + m r_0^2\varepsilon$

$\frac{m}{2}(r_0^2 + 2r_0\varrho)(\dot\varphi_0^2 + 2\dot\varphi_0\varepsilon) + \frac{m}{2}\dot\varrho^2 - \frac{e^2}{r_0}\left(1 - \frac{\varrho}{r_0}\right)(1 + \gamma\cos^2\varphi) = U$

$\frac{m}{2}r_0^2\dot\varphi_0^2 + m r_0\dot\varphi_0^2\varrho + m r_0^2\dot\varphi_0\varepsilon + \frac{m}{2}\dot\varrho^2 - \frac{e^2}{r_0} + \frac{e^2}{r_0}\frac{\varrho}{r_0} - \frac{e^2}{r_0}\gamma\cos^2\varphi = U$

$\frac{p - p_0}{m} = 2r_0\varphi_0\varrho + r_0^2\varepsilon, \; U - U_0 =$

$\Omega = -\frac{2e^2}{r} + \frac{e^2}{r^2}(1 + \gamma\cos^2\varphi) = -\frac{e^2}{r^2}(1 - \gamma\cos^2\varphi)$



$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad r = r_0 \quad \varphi = 0 \quad r = r_m \quad r^2\dot\varphi = \text{konst} = r_0^2\dot\varphi_0^2 = r_m^2\dot\varphi_m^2$

$r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2 - \frac{c}{r} = a, \; r^2\dot\varphi = b$

$r = r_0 \quad \dot\varphi = \dot\varphi_0, \; \dot r = 0, \; r_0^2\dot\varphi_0^2 - \frac{c}{r_0} = a, \; r_0^2\dot\varphi_0 = b$

$r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2 - \frac{c}{r}(1 - \gamma\cos^2\varphi) = a, \; r^2\dot\varphi = b$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right) = 1$

$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\left(\cos^2\varphi + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\right) = \frac{1}{a^2} \quad x = a\cos\varphi \quad y = b\sin\varphi$

$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e^2}{r^2}\cos\varphi(1 - \gamma\cos^2\varphi)$

$-m a^2\cos\varphi = -\frac{e^2}{a^2 + b^2}\cos\varphi(1 - \gamma\cos^2\varphi)$

$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \frac{1}{r} = k(1 + \varepsilon\cos\varphi) \quad \frac{1}{r^2} = k^2(1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2\cos^2\varphi)$

$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \frac{1}{r^2} = k^2(1 +$

$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{b^2}\left(\sin^2\varphi + \frac{b^2}{a^2}\cos^2\varphi\right) = \frac{1}{b^2}\left[1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\cos^2\varphi\right] = \frac{1}{b^2}(1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi)$

$T = \frac{m}{2}(r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2) \quad V = -\frac{e^2}{r} \quad q$ Koordinate $\dot q = \frac{dq}{dt}$

$\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}\right) = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial \dot r} = m\dot r \quad \frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = mr^2\dot\varphi$

$\frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot\varphi^2 \quad \frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0$

$\frac{e^2}{r^2} - mr\dot\varphi^2 + m\ddot r = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{e^2}{r^2} \quad \frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0$

$mr^2\ddot\varphi + 2mr\dot\varphi\dot r = 0$

$r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi = 0$

$$\frac{1}{2}(\dot r^2+r^2\dot\vartheta^2)-\frac{g}{r}=\mathcal{E} \quad r^2\dot\vartheta=R,\ r^2\frac{d\vartheta}{dt}=R,\ \frac{1}{r^2}\frac{dt}{d\vartheta}=\frac{1}{R}$$

$$\frac{1}{2}\left(\dot r^2+\frac{R^2}{r^2}\right)-\frac{g}{r}=\mathcal{E},\ \frac{dr}{dt}=\sqrt{2\left(\mathcal{E}+\frac{g}{r}\right)-\frac{R^2}{r^2}}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\vartheta}=\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{R^2}+\frac{2g}{R^2}\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}}=\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{R^2}+\frac{g^2}{R^4}-\left(\frac{1}{r}-\frac{g}{R^2}\right)^2}=\sqrt{p^2-\varrho^2}$$

$$-\frac{d\varrho}{d\vartheta}=\sqrt{p^2-\varrho^2} \quad \frac{d\varrho}{d\vartheta}=0 \quad p^2=\varrho^2,\ r=r_0 \quad \varrho=\varrho_0=p$$

$$V=\frac{g}{r}(1+\gamma\cos^2\varphi)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{R^2}+\frac{2g}{R^2}\frac{1}{r}-\frac{1}{r^2}+\frac{g}{r}\gamma\cos^2\varphi}$$

$$-\frac{1}{r_0^2}\frac{d\varrho}{d\varphi}=\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{R^2}+\frac{2g}{R^2}\frac{1}{r_0}-\frac{1}{r_0^2}+\frac{g}{r_0}\gamma\cos^2\varphi-\frac{2g}{R^2}\frac{\varrho}{r_0^2}-\frac{2\varrho}{r_0^3}}$$

$$\gamma=0 \quad \frac{dr}{d\varphi}=0$$

$$r=r_0 \quad r=r_0+\varrho=r_0\left(1+\frac{\varrho}{r_0}\right)$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_0}\left(1-\frac{\varrho}{r_0}\right)=\frac{1}{r_0}-\frac{\varrho}{r_0^2}$$

$$\frac{1}{r^2}=\frac{1}{r_0^2}\left(1-\frac{2\varrho}{r_0}\right)=\frac{1}{r_0^2}-\frac{2\varrho}{r_0^3}$$

$$-\frac{1}{r_0^2}\frac{d\varrho}{d\varphi}=\sqrt{\varrho\left(-\frac{2g}{R^2r_0^2}-\frac{2}{r_0^3}\right)+\frac{g}{r_0}\gamma\cos^2\varphi}$$

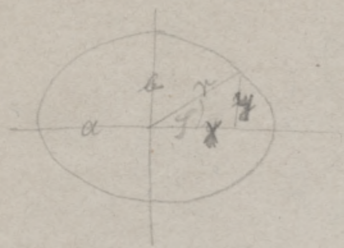
$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{-a^2x+b\cos^2y}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)=1,\ \frac{1}{r}=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{b}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=\frac{1}{b}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2\varphi}=\frac{1}{b}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$$

$$-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=+\frac{1}{2b}\frac{\varepsilon^2 2\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}}=\frac{a^2-b^2}{a^2b}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{b\cos^2x-a^2y}$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad x=r\cos\varphi \quad y=r\sin\varphi$$

$$r^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}\right)=1 \quad \frac{1}{r}=\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi}{b^2}}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{b}\sqrt{1-\cos^2\varphi+\frac{b^2}{a^2}\cos^2\varphi}=\frac{1}{b}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2\varphi}=\frac{1}{b}\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}$$

$$\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2} \quad a>b \quad \varepsilon^2\ll 1 \quad \frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=\frac{1\cdot\varepsilon^2\, 2\cos\varphi\sin\varphi}{b\cdot 2\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}}=\frac{\varepsilon^2}{b}\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\varphi}}$$

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{b}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\varphi\right), \quad \frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}=\frac{1}{b}\varepsilon^2\cos\varphi\sin\varphi$$

$$V_\perp=\frac{e^2}{r}\left[1+\frac{\alpha^2}{r^2}\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi-1\right)\right]=\frac{e^2}{r}\left[1-\frac{3}{2}\alpha^2+\left(\frac{3}{2}\alpha\cos\varphi\right)^2\right]$$

$$V=-\frac{e^2}{r}\left(1+\frac{3}{2}\alpha^2\right)\left(1-\frac{\frac{9}{4}\alpha^2}{1+\frac{3}{2}\alpha^2}\cos^2\varphi\right)=-\frac{g}{r}(1-\gamma\cos^2\varphi)$$

$$T=\frac{m}{2}(r^2\dot\varphi^2+\dot r^2) \quad \mathcal{E}=T+V \quad R=mr^2\dot\varphi \quad r^2\dot\varphi=\frac{R}{m}=R'$$

$$\mathcal{E}'=\frac{2}{m}\mathcal{E}=\frac{2}{m}T+\frac{2}{m}\frac{g}{r}(1\ \gamma\cos^2\varphi); \quad r^2\dot\varphi^2+\dot r^2-\frac{g'}{r}(1-\gamma\cos^2\varphi)=\mathcal{E}'$$

$$V=V_\perp-\frac{2e^2}{r}=-\frac{e^2}{r}\left[1+\frac{3}{2}\alpha^2-\frac{9}{4}\alpha^2\cos^2\varphi\right]=-\frac{g}{r}(1-\gamma\cos^2\varphi)$$

$$r^2\dot\varphi=R', \quad r^2\dot\varphi^2+\dot r^2-\frac{g'}{r}(1-\gamma\cos^2\varphi)=\mathcal{E}'$$

$$\dot\varphi^2=\frac{R'^2}{r^4}, \quad \frac{R'^2}{r^2}+\dot r^2-\frac{g'}{r}(1-\gamma\cos^2\varphi)=\mathcal{E}'$$

$$\dot r=\frac{dr}{dt}=\sqrt{\mathcal{E}'-\frac{R'^2}{r^2}+\frac{g'}{r}(1-\gamma\cos^2\varphi)}, \quad \dot\varphi=\frac{R'}{r^2}, \quad \frac{dt}{d\varphi}=\frac{r^2}{R'}$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{r^2}{R'^2}\sqrt{\mathcal{E}'-\frac{R'^2}{r^2}+\frac{g'}{r}(1-\gamma\cos^2\varphi)}$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{r}{R'^2}\sqrt{\mathcal{E}'r^2+g'(1-\gamma\cos^2\varphi)r-R'^2}$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}=-\frac{1}{R'^2}\sqrt{\mathcal{E}'-R'^2\left(\frac{1}{r}\right)^2+g'\left(\frac{1}{r}\right)(1-\gamma\cos^2\varphi)} \quad \frac{d\sigma}{d\varphi}=-\frac{1}{R'^2}\sqrt{\mathcal{E}'+g'\sigma(1-\cos^2\varphi)-R'^2\sigma^2}$$

k Ring x y Ebene, Schnittlinie der beiden Ringe x Achse

ϑ zwischen beiden Ringebenen ϑ, φ und ψ Azimuth in Ebenen k, j

$x_k = a_k \cos\varphi,\ y_k = a_k \sin\varphi,\ z_k = 0$

$x_j = a_j \cos\psi,\ y_j = a_j \sin\psi \cos\vartheta,\ z_j = a_j \sin\psi \sin\vartheta$

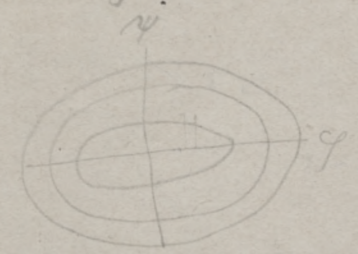
$r^2 = (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2 = a_k^2 + a_j^2 - 2 a_k a_j \cos\Theta$

$\cos\Theta = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta$

Sommerfeld, Atombau und Röntgenspektren Phys. Zeitschr. 19 S. 303 (1918 S. 14

$T = \frac{m}{2}\dot\varphi^2 \quad V = \omega^2 \frac{m}{2}\varphi^2 \quad u = \frac{m}{2}(\dot\varphi^2 + \omega^2\varphi^2)$

$\psi = \frac{\partial u}{\partial\dot\varphi} = m\dot\varphi \quad u = \frac{m}{2}\omega^2\varphi^2 + \frac{1}{2m}\psi^2 \quad dG = \iint_u^{u+du} d\varphi\, d\psi$

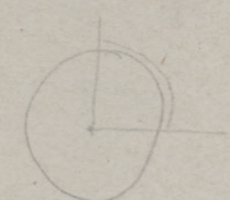


$f(x,y) = c \quad y = y(x,c)$

$\int [y(x, c+dc) - y(x,c)]\, dx = \iint_c^{c+dc} dx\, dy$

$y(x, c+dc) = y(x,c) + \frac{\partial y}{\partial c} dc$

$\int \left[\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_x dc\right] dx = dc \int \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_x dx \quad \left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_x dy =$



$x^2 + y^2 = r^2 \quad \iint_{r^2}^{r^2+dr^2} dx\, dy = \int (y + dy)\, dx - \int y\, dx$

$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad y + dy = \sqrt{r^2 + dr^2 - x^2}$

$\iint_{r^2}^{r^2+dr^2} dx\, dy = \int \left(\sqrt{r^2 + dr^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - x^2}\right) dx \quad y = f(x^2, r^2)$

$\sqrt{r^2 + dr^2 - x^2} - \sqrt{r^2 - x^2} = \left(\frac{\partial y}{\partial r^2}\right)_x dr^2 \quad \iint dx\, dy = dr^2\, 4 \int_0^r \frac{dx}{\cancel{2y}} = dr^2\, 8 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$

$x^2 + y^2 = r^2 \cdot dr^2 = \left(\frac{\partial r^2}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial r^2}{\partial y}\right)_x dy, \ (\partial r^2)_x = \left(\frac{\partial r^2}{\partial y}\right)_x (\partial y)_x$

$x = r\cos\alpha$

$r \int_0 \sin\alpha\, dx$

$dx = -r\sin\alpha\, d\alpha$

$-r^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2\alpha\, d\alpha$

$r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha\, d\alpha = \frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2}$

$1 = \left(\frac{\partial r^2}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial y}{\partial r^2}\right)_x \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad \left(\frac{\partial r^2}{\partial y}\right)_x = 2y,\ y^2 = r^2 - x^2$

$dr^2\, 2\pi r^2$

$\left(\frac{\partial y^2}{\partial r^2}\right)_x = 2y \left(\frac{\partial y}{\partial r^2}\right)_x = 1, \ \left(\frac{\partial y}{\partial r^2}\right)_x = \frac{1}{2y}$

$\iint_c^{c+dc} dx\, dy = dc \int \frac{dx}{\left(\frac{\partial c}{\partial y}\right)_x} = dc \int \frac{dy}{\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)_y}$

$u = \frac{m}{2}\omega^2\varphi^2 + \frac{1}{2m}\psi^2 \quad \iint_u^{u+du} d\varphi\, d\psi = 4 \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_\varphi}$

$\int_0^{\varphi_0} \sqrt{2um - m^2\omega^2\varphi^2}\, d\varphi$

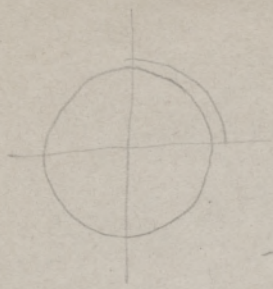
$= \frac{1}{2}\varphi_0 \sqrt{2um - m^2\omega^2\varphi_0^2} + \frac{1}{2}\frac{2um}{m\omega} \arcsin \varphi_0 \sqrt{\frac{m\omega^2}{2u}}$

$\left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)_\varphi = \frac{\psi}{m} \quad \frac{\psi^2}{2m} = u - \frac{m}{2}\omega^2\varphi^2,\ \frac{\psi}{m} = \sqrt{2um - m^2\omega^2\varphi^2}$

$\frac{2u}{m\omega^2} = \varphi_0^2 \quad m^2\omega^2\varphi_0^2 = 2um, \quad \iint_u^{u+du} d\varphi\, d\psi = \frac{2\pi\, du}{\omega}$

$\iint d\varphi\, d\psi = \int \psi\, d\varphi = \int \psi\, \partial$

$\int_0^{\varphi_0} \sqrt{2um - m^2\omega^2\varphi^2}\, d\varphi = \frac{1}{2}\frac{2u}{\omega}\frac{\pi}{2}$



$$x^2+y^2=r^2=c \quad (r+dr)^2=r^2+2r\,dr \quad dc=2r\,dr$$

$$\iint\limits_{c}^{c+dc} dx\,dy = dc\int\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_x dx \quad y=\sqrt{r^2-x^2},\ \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_x \cancel{= \frac{\frac{1}{2}2r}{y} = \frac{r}{y},\ y=\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$\cancel{\iint\limits_{c}^{c+dc} dx\,dy = 4dc\,r\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 4dc\cdot r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r = 4\cdot 2r^2dr\frac{\pi}{2} = 4\pi r^2dr}$$

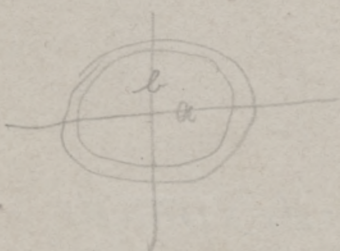
$$y=\sqrt{c-x^2},\ \left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)_x=\frac{1}{2y} \quad \iint\limits_{c}^{c+dc} dx\,dy = dc\cdot 2\int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}} = 2dc\arcsin\frac{r}{r}$$

$$\iint\limits_{c}^{c+dc} dx\,dy = 2dc\frac{\pi}{2} = \pi\,dc = 2\pi r\,dr$$

$$u=\frac{m}{2}\omega^2\varphi^2+\frac{1}{2m}\psi^2 \quad \iint\limits_{u}^{u+du} d\varphi\,d\psi = du\,4\int_0^{\varphi_0}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_\varphi d\varphi$$

$$\psi^2=\sqrt{2mu-m^2\omega^2\varphi},\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)_\varphi=\frac{2m}{2\psi}=\frac{m}{\psi},\ m\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2mu-m^2\omega^2\varphi}} = \frac{1}{2}\frac{m}{\ }\varphi_0\sqrt{2mu-m^2\omega^2\varphi_0^2} + \frac{1}{2}m\frac{2mu}{m\omega}\arcsin\varphi_0\sqrt{\frac{m^2\omega^2}{2mu}}$$

$$u=\frac{m}{2}\omega^2\varphi_0^2,\ \varphi_0^2=\frac{2u}{m\omega^2}\ \varphi_0=\sqrt{\frac{2mu}{m^2\omega^2}} \quad \frac{1}{2}m\varphi_0^2\frac{1}{\omega}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\omega}u=$$



$$\pi ab,\ u=\frac{m}{2}\omega^2\varphi^2+\frac{1}{2m}\psi^2,\ 1=\frac{\varphi^2}{\frac{2u}{m\omega^2}}+\frac{\psi^2}{2mu}$$

$$a^2b^2=\frac{2u\,2mu}{m\omega^2}=\frac{4u^2}{\omega^2} \quad ab=\frac{2u}{\omega} \quad f=\pi ab=\frac{2\pi u}{\omega}$$

$$\frac{df}{du}=\frac{2\pi}{\omega} \quad df=\frac{2\pi}{\omega}du$$

$$r = r_0 + \varrho\cos\varphi + \sigma\sin\varphi$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\varrho\sin\varphi + \sigma\cos\varphi$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \varrho^2\sin^2\varphi - 2\varrho\sigma\sin\varphi\cos\varphi + \sigma^2\cos^2\varphi = \frac{\varrho^2+\sigma^2}{2}$$

$$r^2 = r_0^2 + \varrho^2\cos^2\varphi + \sigma^2\sin^2\varphi + 2r_0\varrho\cos\varphi + 2r_0\sigma\sin\varphi + 2\varrho\sigma\cos\varphi\sin\varphi$$

$$= r_0^2 + \frac{\varrho^2+\sigma^2}{2} + 2r_0\varrho\cos\varphi + 2r_0\sigma\sin\varphi$$

$$r^3 = r^2(r_0 + \varrho\cos\varphi + \sigma\sin\varphi)$$

$$= r_0^3 + \frac{\varrho^2+\sigma^2}{2}r_0 + 2r_0^2\varrho\cos\varphi + 2r_0^2\sigma\sin\varphi$$

$$u = \frac{m}{2}(r^2\dot\varphi^2 + \dot r^2) - \frac{g}{r}, \quad \psi = \frac{\partial u}{\partial \dot\varphi}, \quad \varrho = \frac{\partial u}{\partial \dot r}$$

$$\psi = m r^2 \dot\varphi, \quad \varrho = m\dot r, \quad \dot\varphi^2 = \frac{\psi^2}{m^2 r^4}, \quad \dot r^2 = \frac{\varrho^2}{m^2}$$

$$u = \frac{1}{2m}\left(\frac{\psi^2}{r^2} + \varrho^2\right) - \frac{g}{r} \qquad \dot r = 0 \quad u = \frac{1}{2m}\frac{\psi^2}{r^2} - \frac{g}{r}$$

$$\iint_u^{u+du} d\varphi\, d\psi\, dr\, d\varrho$$

$$y + r = 2a, \quad x^2 + y^2 = r^2$$

$$4e^2 = r^2 - y^2 = (r+y)(r-y)$$

$$r - y = \frac{2e^2}{a} \quad 2y = 2\left(a - \frac{e^2}{a}\right), \quad p = \frac{a^2 - e^2}{a}$$

$$a^2 - e^2 = b^2 \quad p = \frac{b^2}{a}$$

$$x = r\cos\varphi - e, \quad y = r\sin\varphi$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{r^2\cos^2\varphi - 2er\cos\varphi + e^2}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\varphi - 2\frac{e}{r}\cos\varphi + \left(\frac{e}{r}\right)^2}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} \qquad e^2 = a^2 - b^2 \quad \frac{e^2}{a^2} = \varepsilon^2$$

$$e^2 = \varepsilon^2 a^2 \quad e = \varepsilon a$$

$$\frac{\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\varphi}{b^2} = \frac{1}{a^2}\left(\cos^2\varphi + \frac{a^2}{b^2}\sin^2\varphi\right) = \frac{1}{a^2}(1 + \varepsilon^2\cos^2\varphi)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon\cos\varphi}{p} = \frac{a(1 + \varepsilon\cos\varphi)}{b^2}, \quad \frac{1}{r^2} = \frac{a^2(1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2\cos^2\varphi)}{b^4}$$

$$\varepsilon^2 a^2 = e^2 \quad \frac{1}{r^2} = \frac{a^2 + 2ea\cos\varphi + e^2\cos^2\varphi}{b^4} = 1$$

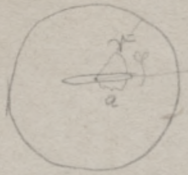
$$1 = \frac{r^2 a^2 + 2ea r^2 \cos\varphi + e^2 r^2 \cos^2\varphi}{b^4}$$

$$a^2\left(x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2\right) = 1 \quad a^2\left(r^2\cos^2\varphi - 2er\cos\varphi + e^2 + \frac{a^2}{b^2}r^2\sin^2\varphi\right) = 1$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \varepsilon\cos\varphi}{p} \quad \frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} = -\frac{\varepsilon\sin\varphi}{p}, \quad \frac{p}{r} - 1 = \varepsilon\cos\varphi, \quad \cos\varphi = \frac{p - r}{r\varepsilon} = \frac{p}{r\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{(p-r)^2}{r^2\varepsilon^2}} = \frac{1}{r\varepsilon}\sqrt{r^2\varepsilon^2 - p^2 + 2pr - r^2} = \frac{1}{r\varepsilon}\sqrt{r^2(\varepsilon^2 - 1) + 2pr - p^2}$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi} = -\frac{1}{p}\sqrt{(\varepsilon^2 - 1) + 2p\frac{1}{r} - \frac{p^2}{r^2}}$$



$$V = e\int \frac{\frac{e}{2\pi a}\,da}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\varphi\cos\psi}} = \frac{e^2}{2\pi r}\int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{r}\right)^2-2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\varphi\cos\psi}}$$

$$\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2-2\left(\frac{a}{r}\right)\cos\varphi\cos\psi\right]^{\frac{1}{2}} = 1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\varphi\cos^2\psi-1\right)$$

$$V = \frac{e^2}{r}\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{1}{2}\left(3\cos^2\varphi\,\frac{1}{2}-1\right)\right] = \frac{e^2}{r}\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi-1\right)\right] \quad V_1 = -\frac{2e^2}{r}+\frac{e^2}{r}[\ \ ]$$

$$T = \frac{m}{2}\left(r^2\dot\varphi^2+\dot r^2\right),\quad T+V_1 = \mathcal{E},\quad mr^2\dot\varphi = R,\quad \dot\varphi = \frac{R}{mr^2},\quad \dot\varphi^2 = \frac{R^2}{m^2r^4}$$

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}\left(\frac{R^2}{m^2r^2}+\dot r^2\right)-\frac{e^2}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi-1\right)\right]$$

$$\dot r = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}+\frac{2e^2}{m}\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi-1\right)\right]-\frac{1}{r^2}\frac{R^2}{m^2}}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \dot r\frac{1}{\dot\varphi} = \frac{m}{R}r^2\sqrt{\ } = \frac{m}{R}\sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}r^4+2\frac{e^2}{m}r^3\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi-1\right)\right]-r^2\frac{R^2}{m^2}}$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2\mathcal{E}m}{R^2}r^4+\frac{2e^2m}{R^2}r^3-r^2-\frac{2e^2m}{R^2}\frac{1}{2}a^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\varphi-1\right)r$$

$$r = r_0+\varrho_1\cos\varphi+\sigma_1\sin\varphi+\varrho_2\cos2\varphi+\sigma_2\sin2\varphi$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = -\varrho_1\sin\varphi+\sigma_1\cos\varphi-\varrho_2 2\sin2\varphi+\sigma_2 2\cos2\varphi$$

$$-\varrho_2\sigma_1 2\cos\varphi\sin2\varphi+\sigma_1\sigma_2 2\cos\varphi\cos2\varphi$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \varrho_1^2\sin^2\varphi-2\varrho_1\sigma_1\sin\varphi\cos\varphi+\sigma_1^2\cos^2\varphi+\varrho_1\varrho_2 2\sin\varphi\sin2\varphi-\varrho_1\sigma_2 2\sin\varphi\cos2\varphi$$

$$-\varrho_2\sigma_1\sin\varphi+\sigma_1\sigma_2\cos\varphi$$

$$= \frac{\varrho_1^2}{2}-\frac{1}{2}\varrho_1\cos2\varphi-\varrho_1\sigma_1\sin2\varphi+\frac{\sigma_1^2}{2}+\frac{1}{2}\sigma_1^2\cos2\varphi+\varrho_1\varrho_2\cos\varphi+\varrho_1\sigma_2\sin\varphi$$

$$= \frac{\varrho_1^2+\sigma_1^2}{2}-\varrho_1\sigma_1\sin2\varphi+\frac{\sigma_1^2-\varrho_1^2}{2}\cos2\varphi+(\varrho_1\varrho_2+\sigma_1\sigma_2)\cos\varphi-(\sigma_1\varrho_2-\varrho_1\sigma_2)\sin\varphi$$

$$r^2 = r_0^2+\varrho_1^2\cos^2\varphi+\sigma_1^2\sin^2\varphi+2r_0\varrho_1\cos\varphi+2r_0\sigma_1\sin\varphi+2\varrho_1\sigma_1\sin\varphi\cos\varphi$$

$$= r_0^2+\frac{\varrho_1^2+\sigma_1^2}{2}+2r_0\varrho_1\cos\varphi+2r_0\sigma_1\sin\varphi+\frac{\varrho_1^2-\sigma_1^2}{2}\cos2\varphi+\varrho_1\sigma_1\sin2\varphi$$

$$r^3 = r^2(r_0+\varrho_1\cos\varphi+\sigma_1\sin\varphi)$$

$$= r_0^3+r_0\frac{\varrho_1^2+\sigma_1^2}{2}+2r_0^2\varrho_1\cos\varphi+2r_0^2\sigma_1\sin\varphi+\frac{\varrho_1^2-\sigma_1^2}{2}r_0\cos2\varphi+r_0\sigma_1\varrho_1\sin2\varphi$$

$$+r_0\varrho_1^2 \quad +r_0^2\varrho_1\cos\varphi+\varrho_1^2\sigma_1\sin\varphi \quad +r_0\varrho_1^2\cos2\varphi \quad +r_0\sigma_1\varrho_1\sin2\varphi$$

$$+ \quad \frac{\varrho_1^2+\sigma_1^2}{2}\varrho_1\cos\varphi+r_0^2\sigma_1\sin\varphi$$

$$+\frac{\varrho_1^2-\sigma_1^2}{2}\frac{\varrho_1}{2}\cos\varphi$$

Wasserstoff

$M_1=2\quad M_2=3\quad \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\begin{array}{r}1{,}0000\\ 0{,}8165\\ \hline 0{,}1835\end{array}\quad x=x_0\,n^{(1-\sqrt{\frac{M_1}{M_2}})}=1{,}6\cdot n^{0{,}1835}$

$$\frac{100}{x}=1+\frac{100-x_0}{x_0}n^{\kappa}=\frac{x_0+(100-x_0)n^{\kappa}}{x_0},\quad x=\frac{100\,x_0}{100n^{\kappa}+x_0(1-n^{\kappa})}$$

Stickstoff

$M_1=32\cdot1{,}008\quad M_2=31\cdot1{,}008\quad \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}=\sqrt{\frac{32}{31}}=\sqrt{1+\frac{1}{31}}=1+\frac{1}{62}\quad \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}-1=\frac{1}{62}$

$$\frac{100-x}{x}=\frac{100-x_0}{x_0}n^{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}-1},\quad \frac{x}{100-x}=\frac{x_0}{100-x_0}n^{1-\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}}$$

$$\frac{100}{x}=1+\frac{100-x_0}{x_0}n^{\mu-1}=\frac{x_0+(100-x_0)n^{\mu-1}}{x_0},\quad x=\frac{100\,x_0}{x_0+(100-x_0)n^{\mu-1}}$$

$$x=x_0\left[1-\frac{100-x_0}{100}\,\frac{1}{62}\,2{,}3\lg n\right]$$

Stickstoff (x) + Wasserstoff ($1-x$)

$x=x_0\,n^{(1-\sqrt{\frac{M_1}{M_2}})}\quad \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}\quad 1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\quad n=30,\ 30^{\frac{3}{4}}=N\tfrac{3}{4}\lg 30=\begin{array}{r}1{,}4471\\ 0{,}3618\\ \hline 1{,}0853\end{array}=12{,}17$

$x_0=1{,}7\quad x=1{,}7\cdot12{,}17=20{,}7\%$ gef. $8{,}5\%$, $8{,}5=1{,}7\cdot n^{\frac{3}{4}}$, $5=n^{\frac{3}{4}}$, $\lg 5=\frac{3}{4}\lg n$, $\lg n=\frac{4}{3}\,0{,}699$ (233)

$\lg n=0{,}932\quad n=8{,}55$

H_2) $x=1{,}6\cdot8{,}55^{0{,}1835}\quad \lg 8{,}55=0{,}932\cdot0{,}1835=\begin{array}{r}0{,}9694-1\\ +0{,}2637-1\\ \hline 0{,}2331-1\end{array}=0{,}1710$ (2041, 3751) $\quad \lg 30=1{,}4471\cdot0{,}1835=\begin{array}{r}0{,}1605\\ 0{,}2637-1\\ \hline 0{,}4242-1\\ \hline 0{,}2656\end{array}\quad 1{,}843$

$8{,}55^{0{,}1835}=1{,}482\quad x=2{,}37\quad x-x_0=0{,}77$

O_2) $x_0=25{,}4\quad x_0-x=x_0\frac{100-x_0}{100}1{,}1513\frac{1}{31{,}5}\lg 8{,}55=25{,}4\,\frac{74{,}6}{100}\,\frac{1{,}1513}{31{,}5}\,0{,}932\quad \begin{array}{r}1{,}4048\\ +0{,}8727-1\\ +0{,}0612\\ 0{,}9694-1\\ \hline 1{,}3081\\ -1{,}4983\\ \hline 0{,}8098-1\end{array}$

$x_0-x=0{,}6453\quad x=25{,}4-0{,}65=24{,}75$

spez. Gew. d. Wassers

$$s_0=\frac{M}{v_0}=\frac{2\cdot1{,}008+16}{v_0}=\frac{2(1-x_0)M_1+2x_0M_2+M'}{v_0}=\frac{2M_1+2x_0(M_2-M_1)+M'}{v_0}$$

$$s=\frac{2(1-x)M_1+2xM_2+M'}{v_0}=\frac{2M_1+2x(M_2-M_1)+M'}{v_0}$$

$s_0=\frac{2x_0\,dM}{v_0}+\frac{2M_1}{v_0}+\frac{M'}{v_0}\quad s-s_0=\frac{2(x-x_0)dM}{v_0}\quad v_0=\frac{M}{s_0}$

$s=\frac{2x\,dM}{v_0}+\frac{2M_1}{v_0}+\frac{M'}{v_0}\quad s-s_0=s_0 2(x-x_0)\frac{dM}{M}\quad \frac{s-s_0}{s_0}=2(x-x_0)\frac{dM}{M_0}$

H_2) $2(x-x_0)=0{,}0077\quad \frac{dM}{M}=\frac{1}{18}\quad \frac{s-s_0}{s_0}=\frac{0{,}0077}{18}=0{,}000427=0{,}0427\%=4{,}27\cdot10^{-2}\%$

O_2) $x-x_0=-0{,}00323\quad \frac{dM}{M}=-\frac{1}{18}$

$$\cancel{-dx_1 = x_1 P k_1' = x_1 k_1, \quad -dx_2 = x_2 k_2 \quad x_1 =}$$

$$\frac{100-x}{x} = \frac{100-x_0}{x_0} n^{\left(\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}-1\right)}, \quad \frac{100}{x} = \frac{\cancel{x_0}+(100-x_0) n^{\left(\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}-1\right)}}{x_0}$$

$$x = \frac{100 x_0}{x_0 + (100-x_0) n^{\left(\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}-1\right)}}$$

$$x_0 \ll 100 \quad x = \frac{100 x_0}{100\, n^{\left(\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}-1\right)}} = x_0 n^{1-\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}}$$

$$x - x_0 \ll 100 \quad \left|\frac{M_1-M_2}{M_2}\right| \ll 1, \quad \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} - 1 = \sqrt{1+\frac{M_1-M_2}{M_2}} - 1 = \frac{1}{2}\frac{M_1-M_2}{M_2}$$

$$x - x_0 = \frac{(100-x_0)x_0}{100}\left(1 - n^{\frac{1}{2}\frac{dM}{M}}\right) = -\frac{(100-x_0)x_0}{100}\,\frac{1}{2}\frac{dM}{M}\lg n$$

$$s_0 = \frac{M_0}{v_0} \quad s = \frac{M}{v_0} \quad s - s_0 = \frac{M-M_0}{v_0}, \quad \frac{s-s_0}{s_0} = \frac{M-M_0}{M_0}$$

$$M = 2M_H + M_O \quad M_H = (1-\xi)M_I + \xi M_{II} = (1-\xi_0)M_I + \xi_0 M_{II} - (\xi-\xi_0)(M_I - M_{II})$$

$$M_H^0 = (1-\xi_0)M_I + \xi_0 M_{II}$$

$$M_H = M_0^H - (\xi-\xi_0)(M_I-M_{II}) \quad M - M_0 = -2(\xi-\xi_0)(M_I-M_{II})$$

$$\frac{s-s_0}{s_0} = -2(\xi-\xi_0)\frac{dM}{M_0} = n(\xi-\xi_0)\frac{dM}{M_0}$$

$$\frac{74{,}6\cdot 25{,}4}{100}\;\frac{1}{31{,}5}\;1{,}1513$$

$$0{,}6925$$

$$\begin{array}{rl}
\lg 74{,}6 = & 1{,}8727 \\
+\lg 25{,}4 = & 1{,}4048 \\
\hline
& 3{,}2775 \\
-\lg 3150 = & -3{,}4983 \\
\hline
& 0{,}7792-1 \\
+\lg 1{,}1513 = & 0{,}0612 \\
\hline
& 0{,}8404-1 \\
+\lg 0{,}932 = & 0{,}9694-1 \\
\hline
& 0{,}8098-1
\end{array}$$

$\lg 8{,}55 =$

$$-dp_1 = k_1 p_1 dt \quad p_1 = p_1^\circ e^{-k_1 t} \quad \frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1^\circ}{p_2^\circ} e^{-(k_1-k_2)t}$$
$$-dp_2 = k_2 p_2 dt \quad p_2 = p_2^\circ e^{-k_2 t}$$

$$\frac{p_1}{p_1^\circ} = e^{-k_1 t}, \quad \frac{p_1^\circ}{p_1} = e^{k_1 t}, \quad t = \frac{1}{k_1} \ln \frac{p_1^\circ}{p_1},$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1^\circ}{p_2^\circ} e^{\frac{k_2-k_1}{k_1} \ln \frac{p_1^\circ}{p_1}} = \frac{p_1^\circ}{p_2^\circ}\left(\frac{p_1^\circ}{p_1}\right)^{\frac{k_2-k_1}{k_1}} = \frac{p_1^\circ}{p_2^\circ}\left(\frac{p_1^\circ}{p_1}\right)^{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}-1}$$

$$\frac{p_1^\circ}{p_1} = n, \quad \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} - 1 = k, \quad \frac{100-x}{x} = \frac{100-x_0}{x_0} n^k \quad x, x_0 \ll 100 \quad x = x_0 n^{-k} = n^{\left(1-\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\right)}$$

$$x = x_0 + \varepsilon$$

$$\frac{100-x_0-\varepsilon}{x_0+\varepsilon} = \frac{100-x_0-\varepsilon}{x_0\left(1+\frac{\varepsilon}{x_0}\right)} = \frac{100-x_0-\varepsilon}{x_0}\left(1-\frac{\varepsilon}{x_0}\right) = \left(\frac{100-x_0}{x_0} - \frac{\varepsilon}{x_0}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{x_0}\right)$$

$$\frac{100-x}{x} = \frac{100-x_0}{x_0} - \frac{\varepsilon}{x_0}\left(1+\frac{100-x_0}{x_0}\right) = \frac{100-x_0}{x_0} - \frac{\varepsilon}{x_0}\frac{100}{x_0} = \frac{100-x_0}{x_0} n^k$$

$$n^k = 1-\zeta \quad 100-x_0 - \frac{100\varepsilon}{x_0} = 100-x_0-(100-x_0)\zeta$$

$$\frac{100\varepsilon}{x_0} = (100-x_0)\zeta \quad \varepsilon = x - x_0 = \frac{(100-x_0)x_0}{100}(1-n^k)$$

$$(100-x_0) - \frac{100\varepsilon}{x_0} = (100-x_0)n^k, \quad \frac{100\varepsilon}{x_0} = (100-x_0)(1-n^k), \quad \varepsilon = \frac{(100-x_0)x_0}{100}(1-n^k)$$

$$n^k = n^{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}-1}, \quad 1-n^k = 1-n^{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}-1}, \quad \underline{\underline{x = x_0\left[1+\frac{100-x_0}{100}\left(1-n^{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}-1}\right)\right]}}$$

$$M_1 - M_2 = dM \quad \sqrt{\frac{M_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{M_2+dM}{M_2}} = \sqrt{1+\frac{dM}{M}} = 1+\frac{1}{2}\frac{dM}{M} = 1+\frac{\gamma}{2}, \quad \frac{dM}{M} = \gamma$$

$$\sqrt{\frac{M_1}{M_2}} - 1 = k = \frac{\gamma}{2} \quad \frac{x-x_0}{x_0} = \frac{100-x_0}{100}\left(1-n^{\frac{1}{2}\frac{dM}{M}}\right)$$

$$n^{\frac{1}{2}\frac{dM}{M}} = e^{\frac{1}{2}\frac{dM}{M}\ln n} = 1+\frac{1}{2}\frac{dM}{M}\, 2{,}3026 \lg n \quad 1-n^k = -\frac{1}{2}\frac{dM}{M}\, 2{,}3 \lg n = \frac{1}{2}\frac{M_2-M_1}{M} 2{,}3 \lg n$$

$$\frac{x-x_0}{x_0} = \frac{100-x_0}{100}\, 1{,}1513 \frac{M_2-M_1}{M} \lg n \quad \begin{matrix} x_0 = 50 \\ n = 10 \end{matrix}, \quad x-x_0 = 25 \cdot 1{,}1513 \frac{M_2-M_1}{M}$$

$$s = \frac{(100-x)M_1 + xM_2}{100 v_0} = \frac{(100-x)M_1 + xM_1 + x(M_2-M_1)}{100 v_0} = \frac{100M_1 + x(M_2-M_1)}{100 v_0}$$

$$s_0 = \frac{100M_1 + x_0(M_2-M_1)}{100 v_0}, \quad \frac{s-s_0}{s_0} = \frac{(x-x_0)(M_2-M_1)}{100M_1 + x_0(M_2-M_1)} = \frac{x-x_0}{100}\frac{M_2-M_1}{M}$$

$$\frac{M_2-M_1}{M} = 1\% = \frac{1}{100} \quad x - x_0 = \frac{1{,}1513}{4} = 0{,}2878 \quad \frac{s-s_0}{s_0} = \frac{0{,}2878}{100^2} = 0{,}2878 \cdot 10^{-4}$$

$16 \cdot 1{,}008(100-x) + 15 \cdot 1{,}008\, x = 16 \cdot 100$

$1{,}008(1600 - x) = 16 \cdot 100$, $\;100x = 100\frac{16}{1{,}008}$, $\;x = 100\left(16 - \frac{16}{1{,}008}\right)$

$\frac{16}{1+\varepsilon} = 16(1 - \varepsilon + \varepsilon^2 \cdot)$ $\;x = 100 \cdot 16 \cdot (\varepsilon - \varepsilon^2 + \varepsilon^3 \cdots)$

$\varepsilon = \frac{8}{1000}$ $\;\varepsilon^2 = \frac{64}{1000000}$ $\;x = 1{,}6(8 - 0{,}064) = 12{,}8 - 0{,}1 = 12{,}7$

$0{,}008$
$-0{,}000\,008$

$16 \cdot 1{,}008 \cdot (100 - 12{,}7) + 15 \cdot 1{,}008 \cdot 12{,}7 = 1{,}008(16 \cdot 100 - 12{,}7) = 1{,}008 \cdot 1587{,}3$

$= 1587{,}\cdot + 8 \cdot 1{,}59 = 1587{,}3 = 16 \cdot 100$
$12{,}7$

O = 16,000 H = 1,008 O: 87,3% 16,128 a 12,7% 15,120

O_2 molekula

$(100-x)\,A \quad x\,B \quad (50 - y_1 - y_2)\,A_2 \quad y_1\,AB \quad y_2\,B_2$

$[A_2] : [AB] : [B_2] = (100-x)^2 : 2(100-x)x : x^2 = (100 - y_1 - y_2) : y_1 : y_2$

$\frac{(100-x)^2}{2(100-x)x} = \frac{100 - y_1 - y_2}{y_1}, \;\frac{2(100-x)x}{x^2} = \frac{y_1}{y^2} \quad \frac{100-x}{2x} = \frac{100 - y_1 - y_2}{y_1}, \;\frac{2(100-x)}{x} = \frac{y_1}{y_2}$

~~$\frac{100}{x} = \frac{100 - y_2}{y_1}, \;\frac{100-x}{x} = \frac{y_1}{y_2} \quad \frac{100(100-x)}{x^2} = \frac{100 - y_2}{y_2}, \;\frac{100(100-x) + x^2}{x^2} = \frac{100}{y_2}$~~

~~$y_2 = \frac{0x^2}{100(100-x) + x^2} \quad y_1 = y_2 \frac{100-x}{x} = \frac{0x(100-x)}{100(100-x) + x^2} = \frac{x}{1 + \frac{x^2}{100(100-x)}}$~~

~~$x = 12{,}7 \quad \lg x = 1{,}1038 \quad \lg x^2 = 2{,}2076 \quad y_1 = \frac{10000x - 100x^2}{10000 - 100x + x^2}$~~

~~$x^2 = 161{,}3 \quad 10000x = 127000$~~
~~$-100x^2 = -16130$~~
~~110870~~

$\frac{100-x}{2x} = \frac{100 - y_1 - y_2}{y_1}, \;\frac{200-2x}{x} = \frac{y_1}{y_2}, \;\frac{100+x}{2x} = \frac{100 - y_2}{y_1} = \frac{100}{y_1} - \frac{y_2}{y_1}$

$\frac{100}{y_1} = \frac{100+x}{2x} + \frac{y_2}{y_1} = \frac{100+x}{2x} + \frac{x}{2(100-x)} = \frac{(100+x)(100-x) + x^2}{2x(100-x)} = \frac{100^2}{2x(100-x)}$

$100y_1 = 2x(100-x) \qquad \frac{(100-x)^2 + 2(100-x)x + x^2}{100} = \frac{[(100-x) + x]^2}{100} = 100$

$100 - x = 87{,}3 \quad x = 12{,}7$

$y_1 = \frac{2(100x - x^2)}{100} \quad y_2 = \frac{x^2}{100} \quad 2 \cdot 12{,}7 = 25{,}4$

	O_{16}	O_{15}		
22,2	$76{,}2 \cdot 2$	$1{,}6 \cdot 2$	25,4	74,6
$+2 \cdot 1{,}6 = 3{,}2$	152,4	3,2	$74{,}6 \cdot 2$	
25,4	+22,2	+22,2	149,2	
	174,6	25,4	+25,4	
			174,6	25,4

$100x = 1270$
$-x^2 = -161{,}3$
$1108{,}7 \cdot 2$
$2217{,}4$

$x^2 = 161{,}3$
$y^2 = [B_2]$
$= 1{,}6\%$

100,0
−22,2
−1,6
76,2

$y_1 = [AB] = 22{,}2\%$

$$\cancel{\alpha = \frac{e^2}{r^3} \quad r = r_0 + dr \sin 2\pi\nu t \quad dr = a \sin(2\pi\nu t + \alpha)}$$

$$\cancel{\frac{d\alpha}{dr} = \frac{2e^2}{r^3}} \quad \alpha = \frac{e^2}{r_0^2}\left(1 - \frac{2dr}{r_0}\right)$$

$$\frac{\nu^2+2}{\nu^2-1} = \frac{3\pi c^2 m}{Npe^2}\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right) \qquad \nu = 1+\varepsilon \quad \nu^2 = 1+2\varepsilon$$

$$\frac{\nu^2+2}{\nu^2-1} = \frac{3+2\varepsilon}{2\varepsilon} \quad \varepsilon = \nu - 1$$

$$\frac{\nu^2-1}{\nu^2+2} = \frac{2\varepsilon}{3}, \ \varepsilon = \nu - 1 = \cancel{2\pi c}$$

$$\lambda = \frac{n}{2\pi} = c, \ \frac{1}{\lambda} = \frac{n}{2\pi c}$$

$$\cancel{\tfrac{3}{2}}\varepsilon = \frac{Npe^2}{2\cancel{3}\pi^2 c^2 m} \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)}$$

$$\cancel{\nu - 1 = \frac{Npe^2 \, 2 \cdot 4\pi c^2}{2\pi^2 c^2 m} \frac{1}{n_0^2 - n^2}}$$

$$\frac{\nu^2-1}{\nu^2+2} = \frac{\gamma}{3} \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)} \quad \gamma = \frac{Npe^2}{\pi c^2 m}$$

$$\frac{\nu^2-1}{\nu^2+2} = \frac{Npe^2}{3\pi c^2 m} \frac{1}{\left(\frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right)}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{n_0} \quad \lambda = \frac{2\pi c}{n}$$

$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{n_0^2}{4\pi^2 c^2}, \ \lambda^2 = \frac{\cancel{n^2}}{4\pi \cancel{c}^2}$$

$$\frac{\nu^2-1}{\nu^2+2} = \frac{Npe^2 \, 4\pi^{\cancel{2}} \cancel{c^2}}{3\cancel{\pi}\cancel{c^2} m} \frac{1}{n_0^2 - n^2} = \frac{4\pi e^2 Np}{3m} \frac{1}{n_0^2 - n^2}$$

$$\frac{\nu^2-1}{\nu^2+2} = \frac{2}{3}(\nu - 1), \ \nu - 1 = \frac{2\pi e^2 Np}{3m} \frac{1}{n_0^2 - n^2}$$

$$C = \frac{2\pi}{3} \frac{e^2 N}{m} p$$

N Zahl der Molekülen im ccm eines Gases bei 0° u. 760 mm

$$N = \frac{6{,}07 \cdot 10^{23}}{2{,}241 \cdot 10^4} = 2{,}84 \cdot 10^{19} \qquad e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$$

$$\frac{e}{m} = \cancel{5{,}31} \cdot 10^{17}$$

$$N\frac{e^2}{m} = 7{,}29 \cdot 10^{27} \qquad \frac{e^2}{m} = 2{,}54 \cdot 10^{8}$$

$\cancel{\frac{2}{3}} \cancel{\frac{x}{x-1}}$ $\quad \lambda_0 = 48{,}5\,\mu\mu = 48{,}5 \cdot 10^{-7} = 4{,}85 \cdot 10^{-6}\,cm \quad n_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{6\pi \cdot 10^{10}}{4{,}85 \cdot 10^{-6}}$

$n_0 = 3{,}88 \cdot 10^{16} \quad n_0^2 = 1{,}51_5 \cdot 10^{33} = 1515000 \cdot 10^{27}$

$$\Delta = \frac{3\pi c^2 m}{\frac{e^2}{\cancel{m}} N p} \quad \cancel{\mathcal{C}}\Delta = \frac{3}{2} c^2, \quad \mathcal{C} = \frac{3c^2}{2\Delta} = \frac{\cancel{3c^2}\, e^2 N p}{2 \cdot \cancel{3}\pi \cancel{c^2} m} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2 N}{m p}$$

$$\mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2 N}{m} p = 1{,}16 \cdot 10^{27}$$

$$N_\infty = \frac{n-1}{n} \frac{N_H N_{He}}{N_H - \frac{N_{He}}{n}} = \frac{\frac{n-1}{n} N_H (N_H + \vartheta)}{\cancel{\frac{n-1}{n}} N_H (1 - \frac{1}{n}) + -\frac{\vartheta}{n}} = \frac{\frac{n-1}{n} N_H (N_H + \vartheta)}{\frac{n-1}{n} N_H \left(1 - \frac{\vartheta}{(n-1) N_H}\right)}$$

$$N_\infty = \frac{N_H + \vartheta}{1 - \frac{\vartheta}{(n-1) N_H}} = N_H + \vartheta + \frac{\vartheta}{n-1} + \frac{\vartheta^2}{(n-1) N_H} - \frac{\vartheta^2}{(n-1)^2 N_H}$$

$$\cancel{-\frac{\mathcal{C}_1}{R}} \int_0^T \mathcal{C}_1\, dT = \cancel{\mathcal{C}_1 T} \quad \int_0^T = \int_0^{T_1} + \int_{T_1}^{T_2}$$

$\lambda_x = \lambda_0 + \int_0^T \mathcal{C}_g\, dT - \int_0^T \mathcal{C}_1\, dT$

$\lambda = \lambda_0^x + \mathcal{C}_g T - \int_0^T \mathcal{C}_1\, dT$

$\lambda = \lambda_0' + \mathcal{C}_g T - \mathcal{C}_1' T$

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{\mathcal{C}_1 (T_2 - T_1)}{T} dT = \mathcal{C}_1 (T_2 - T_1) \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad \lambda_0 - \int_0^T \mathcal{C}_1\, dT = \lambda_0' - \mathcal{C}_1' T$$

$$\mathcal{E} = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad \int_0^T \frac{\frac{h\nu}{kT^2}}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} dT \qquad e^{\frac{h\nu}{kT}} = x \quad \frac{h\nu}{kT} = \ln x \quad \frac{d \ln x}{dT} = \frac{1}{x} \frac{dx}{dT}$$

$$= -\frac{h\nu}{kT^2}, \quad \frac{h\nu}{kT^2} dT = -\frac{dx}{x}$$

$$\int_0^T \frac{\frac{h\nu}{kT^2} dT}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = -\int_0^x \frac{dx}{x(x-1)} = \int_0^x \frac{dx}{x} - \int_0^x \frac{dx}{x-1}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} \qquad = \ln \frac{x}{x-1} \Big|_0^x = \frac{h\nu}{kT} - \ln\left(e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1\right) \Big|_{T_0}^{T} = \frac{h\nu}{kT} - \ln \frac{h\nu}{kT} - \ln 1 + \frac{1 h\nu}{2 kT} = \frac{1}{2} \frac{h\nu}{kT} - \ln \frac{h\nu}{kT}$$

$$\lambda = \lambda_0 + (\mathcal{C}_g - \mathcal{C}_1) T \qquad \frac{d \ln p}{dT} = \frac{\lambda_0}{RT^2} + \frac{\mathcal{C}_g - \mathcal{C}_1}{RT} \quad \ln p = -\frac{\lambda_0}{RT} + \frac{\mathcal{C}_g - \mathcal{C}_1}{R} \ln T + \mathcal{C}'$$

$$\ln \frac{(2\pi M R)^{\frac{3}{2}}}{N^4 h^3}, \quad K = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^3 c} = \frac{2\pi^2 \mu E^4}{h^3 N^4 c}, \quad \frac{1}{h^3 N^4} = \frac{Kc}{2\pi^2 E^4 \mu}$$

$$\frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}} R^{\frac{3}{2}}}{N^4 h^3} = \frac{K c R^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi} E^4 \mu}$$

$$\ln p = -\frac{\lambda_0'}{RT} + \frac{\mathcal{C}_g}{R} \ln T - \frac{\mathcal{C}_1'}{R} \ln T + \mathcal{C}'$$

$\ln p =$

N

$$\lg \frac{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu^3}{p N (RT)^{\frac{3}{2}}} = 7{,}4131 = \log A$$

$$\frac{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu^3}{N R^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{p T^{\frac{1}{2}}} = A \cdot \frac{x}{p T^{\frac{1}{2}}}, \quad x = A p T^{\frac{1}{2}}$$

$\lg p = 6{,}0057$

$\lg T^{\frac{1}{2}} = 1{,}7940$

$\lg A = 7{,}4131$

$\lg x = 15{,}2128$

$$x = \frac{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu^3}{N R^{\frac{1}{2}}} \qquad \frac{N (RT)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu^3 v} =$$

$\lg \frac{1}{x} = -\lg x \qquad 0{,}00001765\cancel{00}$

$$\lg \frac{N R^{\frac{1}{2}}}{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu^3} = 0{,}1872-16$$

$+ \lg R \qquad = 7{,}9200$

$\qquad\qquad 0{,}7072-8$

$T = 300$

$\cancel{1{,}2 = 30}$

$\lg 300 = 2{,}4771 \cdot \frac{3}{2}$

$\qquad 1{,}2386 \; 2$

$= 3{,}7157$

$0{,}4229-4 \qquad v = 15\,cm$

$$\lg \frac{N (RT)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu^3} = 0{,}4229-4$$

$- \lg v \qquad = 1{,}1761$

$\qquad\qquad 0{,}2468-5$

N

$\cancel{q = \frac{\lambda}{T}}$

$p = RT\, c_D$, $c_F = \frac{x}{v}$

$$p = \frac{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu^3}{N (RT)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\lambda_0}{RT}} \qquad \frac{x}{p} = \frac{N (RT)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu'^3} e^{+\frac{\lambda_0'}{RT}} = \frac{c_F v}{RT\, c_D}$$

$$p = \frac{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu'^3}{N (RT)^{\frac{1}{2}}} \times e^{-\frac{\lambda_0'}{RT}} \qquad \frac{c_F}{c_D} = \frac{N (RT)^{\frac{3}{2}}}{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu'^3 v} e^{+\frac{Q_0}{RT}}$$

$6 \cdot 10^{27}$

$$\nu^3 e^{-\frac{\lambda_0}{RT}} = \nu'^3 x\, e^{-\frac{\lambda_0'}{RT}}$$

$\lg 39{,}6 = 1{,}5977$
$\lg 7{,}16 = 0{,}8549$
$2{,}4526 = 283{,}6$

$$x = \frac{\nu^3}{\nu'^3} e^{-\frac{\lambda_0 - \lambda_0'}{RT}} = \frac{\nu^3}{\nu_3'} e^{\frac{Q_0}{RT}}$$

3,254
+284
538

$$p = RT\, c_g, \quad c_f = \frac{x}{v_0}, \quad x = c_f v_0$$

$$\frac{RT\, c_g}{c_f v_0} = \frac{(2\pi M)^{\frac{3}{2}} \nu'^3}{N (RT)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{\lambda_0'}{RT}}$$

$5{,}1 \cdot 10^{22}$

22400
$2{,}24 \cdot 10^4$

$\frac{c_D}{c_F} = \cancel{e^{\frac{Q}{RT}}}$ Q Wärmemenge, die bei Auflösung von 1 Mol Dampf frei wird, so ist

$$\frac{c_F}{c_D} = e^{+\frac{Q}{RT}}$$

8,39
1,985 : 4,19

8,315 : 1,35 = 6,16
8,10
0,215
0,135
0,080

$$\frac{R}{k} = \frac{8{,}315 \cdot 10^7}{1{,}35 \cdot 10^{-16}} = 6{,}\cancel{16} \cdot 10^{23}$$

1

~~Gegenstand d. Physik sind die in Raum u. Zeit gegebenen beobachtbaren [illegible] die materiellen Objekte. [illegible] Kant gezeigt hat, schafft die Wissenschaft [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Wissenschaft [illegible] [illegible]~~

[illegible] [illegible]

zunächst bekannte [illegible] [illegible]

[illegible] in [illegible]

Physik [illegible] beobachtet [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

Form. Wodurch wird [illegible] zur Beobachtung [illegible]?

[illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] [illegible]

[illegible] Form [illegible]

~~Kant~~ Durch Objektivierung d. [illegible] wird die Welt d. Physik [illegible] geschaffen. [illegible] [illegible] Objektivierung [illegible] Richtung, Ziel, [illegible] Kant [illegible], [illegible] [illegible] bisher gefolgt sind, hat auch gezeigt, in welcher Form diese Objektivierung [illegible] geschieht.

Vorbereitung d. Empfindungsinhalten [illegible]

Bei wissenschaftl. Arbeiten u. Denken wird d. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Logik [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] die Formen und [illegible] [illegible] [illegible] Verhältnisformen d. Logik [illegible] Verhältnisformen [illegible]

Mathematik

zunächst die Raum- u. Zeitanschauung;

(2)

[illegible] (Kategorien) [illegible]

[illegible] A ist B [illegible]

[illegible] A ist [illegible] B [illegible] C oder D [illegible]

[illegible] Mit Hilfe dieser [illegible]

[illegible] Objekt [illegible]

[illegible] (Kategorien) [illegible]

[illegible] konstitutiv (Kategorien) [illegible]

[illegible] Objekt [illegible]

[illegible]

[illegible] (A ist B) [illegible]

[illegible]

Am besten am Beispiel d. Kepler'sche Gesetze die Planeten-
bewegung Beobachtungsthatsachen. Zugrunde liegende Er-
fahrungsthatsachen sind die Ortsbestimmungen der beob-
achtenden Astronomen. Gesetzmässige Verknüpfung zwischen
diesen Inhalten zuerst Ptolemäisches Weltsystem, dann Kepler'sche Gesetze
Zusammenfassung d. Empfindungsinhalte. Die Kepler'schen Gesetze folgen
durch logische Operation einer Menge von Urtheilen über Empfindungs-
inhalte (Ortsbestimmungen) enthaltende Urtheile. In Kepler'schen
Gesetzen Inhalt sublimiert, enthält weniger Irrationales als Ptol.
weiter geht diese Entwicklung in Newton'schen Gesetzen, die
noch viel allgemeiner sind und deren Inhalt zugleich umfassender
u. rationaler ist, aus denen die Kepler'schen Gesetze durch
logische Operationen abgeleitet werden. So geht d. allge-
meine Bestreben d. Physik dahin, alle Empfindungsinhalte
miteinander gesetzmässig zu verknüpfen und schliesslich
aus einem obersten Gesetz abzuleiten. Natürlich Ideal,
aber zeigt Richtung. Jetzt schon in den einzelnen ~~Wissenschaft~~
Zweigen d. Physik ~~[illegible] Mechanik~~ oder einiger grosser Umfassung [illegible] Maxwell'sche Theorie etc. Bestreben
verwirklicht [illegible],
die einzelnen Wissenschaften zu vereinigen, ihre obersten Prinzipien
wieder aus noch höheren allgemeinen Sätzen abzuleiten (Optik
u. Maxwell'sche Theorie, Mechanik u. Thermodynamik etc.) Letztes Ziel
Logische Weltformel. Inhalt dieser allgemeinen Sätze
u. der Weltformel immer rationaler, Inhalt enthält viel weniger von
dem zufälligen, ursprünglichen Empfindungsinhalten. Eine bloss
Objektivierung genügt schon gesetzmässige Verknüpfung; Rationa-
lisierung weitergehende Forderung, wobei dahingestellt bleiben
mag, wie weit diese Forderung schon damit erfüllt. Das ist ein
rein philosophisches Problem. Diese weitergehende Forderung der
Rationalisierung der Inhalte d. Phys. Natürlich besteht aber dieser mit
Recht.
Erst mit bes. Glück und Physikern gemeinsam erfolgreiche immer [illegible]
Verwendung durch die Philosophen.

4

denn dass z. B. d. Inhalt d. Newtonschen Gesetze etc. viel rationa-
ler, weniger alogische Momente enthaltend ist als die Übergangs[illegible]
und ihre ableitbaren Beziehungen [illegible] enthaltende Arbeiten, wird wohl
niemand bestreiten. Gewisse enthält er aber noch solche alogische
Bestandteile und es ist überhaupt kein Fall bekannt, wo das bei
einem physikalischen Gesetze nicht der Fall wäre. Die Ausschaltung
des Alogischen ist aber lediglich ein in weiter Ferne liegendes Ziel,
das gänzlich überhaupt nicht erreicht werden kann. Die Ver-
kennung dieses Umstandes durch einen Philosophen ist es, die
diese ganzen Gedankengänge bei den Physikern ~~[illegible]~~ überhaupt
d. Naturwissenschaftlern so diskreditiert hat. Der bekannteste Fall
ist ja das Hegelsche System. Hegel versuchte aus reinen logischen
Elementen die ganze Erfahrungswelt durch logische Operationen
abzuleiten. Das ist zweifellos die Aufgabe der Wissenschaft,
aber eine unendlich schwere, nie ganz lösbare. Hegel dagegen
hat sich die Sache sehr leicht gemacht und seine Ableitungen (Schlinge
wurden, [illegible] [illegible]) machen auf den vorurteilslosen
Physiker einen abschreckenden u. gräulichen so einfach lächerlichen
Eindruck. Nein so leicht ist die Sache nicht. Wir modernen Physiker
sind schon ~~zufrieden~~ glücklich, wenn es uns gelingt, einen
kleinen Schritt vorwärts nach dem unendlich fernen Ziele zu
tun, das Hegel schon erreicht zu haben glaubte.

Was ich nun zeigen will, ist, dass es uns in
neuerer Zeit tatsächlich gelungen ist, einige solcher Schritte
zu tun und dass das [illegible] das [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible]
Spinoza war.

Das disjunktive Urteil in der theoretischen Physik.

Die ~~theoretische~~ Physik ist die Wissenschaft, die ~~alle~~ die physikalischen Erscheinungen, d. h. letzten Endes alle in Raum und Zeit stattfindenden Vorgänge, erklären will. Der Weg, den sie bei dieser Erklärung einschlägt, ist folgender. Sie stellt durch planmäßige Experimente die gesetzmäßigen ~~Erscheinungen~~ Zusammenhänge der Erscheinungen fest und sucht dann die so gefundenen Naturgesetze aus möglichst allgemeinen Grundgesetzen abzuleiten. Um die Sache an einem konkreten Beispiel klar zu machen, wollen wir etwa die Thermodynamik betrachten, die in methodischer Hinsicht einer der bestausgebildeten Zweige der Physik ist. Hier haben wir eine sehr große Zahl von einzelnen Gesetzen, z. B. über ~~die aus einer gegebenen Wärmemenge maximal gewinnbare Arbeit,~~ über den Zusammenhang von Verdampfungswärme, Dampfdruck und Temperatur, ~~die~~ Abhängigkeit der Schmelztemperatur von der Schmelzwärme und den spez. Gewichten der Flüssigkeit und des festen Stoffes usw. Alle diese nach Hunderten zählenden Gesetze lassen sich aus den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik streng ableiten. In neuerer Zeit ist es sogar gelungen, durch Aufstellung eines dritten Hauptsatzes, des sog. Nernst'schen Wärmetheorems, noch eine große Zahl neuer Gesetze auf diese Weise abzuleiten. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den anderen Zweigen der Physik der Mechanik, ~~der Elektrodynamik usw.~~ in der die ~~ganzen~~ sämtliche Gesetze der Planetenbewegungen aus dem Newtonschen ~~Attraktions~~ Gesetzen, der Elektrodynamik, in der die Gesetze, nach denen elektrischen Ladungen, Magnete und elektrische Ströme in Ruhe und in Bewegung aufeinander wirken, aus den Maxwellschen Gleichungen abgeleitet werden.

H. A. Lorentz, Stoßdämpfung, Versl. Ak. Amst. XIV S. I p. 518 (1905)

Bewegungsgleichung eines Elektrons in der x Richtung bei Reibung:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -fx - g\frac{dx}{dt} + e\mathfrak{E}_x = -fx - g\frac{dx}{dt} + a e e^{int} \qquad n_0^2 = \frac{f}{m}$$

$x = b e^{int}$ (erzwungene Schwingung, die andere mit der Zeit abnimmt)

$$-m n^2 b = -fb - gbin + ae, \quad b(f + ing - mn^2) = ae, \quad f = m n_0^2$$

$$x = b e^{int} = \frac{ae}{m(n_0^2-n^2) + ing} e^{int}$$

Ohne Reibung: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -fx + a e e^{int}$

Allgemeines Integral (erzwungene + eigene Schwingung)

$$x = \frac{ae}{m(n_0^2-n^2)} e^{int} + C_1 e^{in_0t} + C_2 e^{-in_0t}$$

Ist ϑ die seit dem letzten Zusammenstoß verflossene Zeit und x_0 und $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \dot{x}_0$ die Werte von x und $\frac{dx}{dt}$ unmittelbar nach dem Zusammenstoß, so sind C_1 und C_2 bestimmt durch die Gleichungen:

$$b = \frac{ae}{m(n_0^2-n^2)}$$

$$x_0 = b e^{in(t-\vartheta)} + C_1 e^{in_0(t-\vartheta)} + C_2 e^{-in_0(t-\vartheta)}$$

$$\dot{x}_0 = inb e^{in(t-\vartheta)} + in_0 C_1 e^{in_0(t-\vartheta)} - in_0 C_2 e^{-in_0(t-\vartheta)}$$

$$C_1 e^{in_0t} e^{-in_0\vartheta} + C_2 e^{-in_0t} e^{in_0\vartheta} + b e^{in(t-\vartheta)} - x_0 = 0 \qquad |in_0| -in_0$$

$$C_1 e^{in_0t}\, in_0 e^{-in_0\vartheta} + C_2 e^{-in_0t} \cdot (-in_0) e^{in_0\vartheta} + inb e^{in(t-\vartheta)} - \dot{x}_0 = 0$$

$$2C_1 e^{in_0t}\, in_0 e^{-in_0\vartheta} + i(n_0+n) b e^{in(t-\vartheta)} - in_0 x_0 - \dot{x}_0 = 0$$

$$-2C_2 e^{-in_0t} \cdot in_0 e^{+in_0\vartheta} + i(n_0-n) b e^{in(t-\vartheta)} - in_0 x_0 + \dot{x}_0 = 0$$

$$C_1 e^{in_0t} + \frac{n_0+n}{2n_0} b e^{int} e^{i(n_0-n)\vartheta} - \frac{1}{2} x_0 e^{in_0\vartheta} - \frac{1}{2in_0}\dot{x}_0 e^{in_0\vartheta} = 0$$

$$C_2 e^{-in_0t} + \frac{n_0-n}{2n_0} b e^{int} e^{-i(n_0+n)\vartheta} - \frac{1}{2} x_0 e^{-in_0\vartheta} + \frac{1}{2in_0}\dot{x}_0 e^{-in_0\vartheta} = 0$$

$$C_1 e^{in_0t} + C_2 e^{-in_0t} = -b e^{int}\left\{\frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{n_0}\right) e^{i(n_0-n)\vartheta} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{n_0}\right) e^{-i(n_0+n)\vartheta}\right\}$$
$$+ \frac{1}{2} x_0 \left(e^{in_0\vartheta} + e^{-in_0\vartheta}\right) + \frac{1}{2in_0}\dot{x}_0\left(e^{in_0\vartheta} - e^{-in_0\vartheta}\right)$$

$$x = \frac{ae}{m(n_0^2-n^2)} e^{int}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{n_0}\right) e^{i(n_0-n)\vartheta} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{n_0}\right) e^{-i(n_0+n)\vartheta}\right\}$$
$$+ x_0 \cos n_0\vartheta + \frac{\dot{x}_0}{n_0} \sin n_0\vartheta$$

$$x = b e^{int} f(\vartheta) + x_0 \cos n_0\vartheta + \frac{\dot{x}_0}{n_0} \sin n_0\vartheta$$

der Mittelwert x' aller Moleküle mit gleichem ϑ aber beliebigem x_0 und $\dot{x}_0$ ist $x' = b e^{int} f(\vartheta)$

Da zu jedem x_0 und $\dot{x}_0$ ein solches mit entgegengesetztem Vorzeichen ebenso oft vorkommt, die Zahl der Moleküle, für die ϑ zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegt, ist $\frac{N}{\tau} e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta$, falls τ die mittlere Zeit zwischen zwei Zusammenstößen ist. der Mittelwert $\bar{x}$ für beliebiges ϑ ist also:

$$\bar{x} = b e^{int} \frac{1}{\tau}\int_0^\infty f(\vartheta) e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta, \quad f(\vartheta) = 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{n_0}\right) e^{i(n_0-n)\vartheta} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{n_0}\right) e^{-i(n_0+n)\vartheta}$$

Nun ist $\frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta = -\int_0^{-\infty} e^x dx = -e^x\Big|_0^{-\infty} = 1$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{u\vartheta} e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta = \int_0^\infty e^{(u\tau-1)\frac{\vartheta}{\tau}} d\frac{\vartheta}{\tau} = \frac{1}{u\tau-1}\int e^x dx = \frac{1}{u\tau-1} e^{u\vartheta} e^{-\frac{\vartheta}{\tau}}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{u\tau-1} = \frac{1}{1-u\tau}$$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{i(n_0-n)\vartheta} e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta = \frac{1}{1-i(n_0-n)\tau} \qquad \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{i(n_0+n)\vartheta} e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta = \frac{1}{1+i(n_0+n)\tau}$$

$$\bar{x} = b e^{int}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{n}{n_0}\right)\frac{1}{1-i(n_0-n)\tau} + \left(1-\frac{n}{n_0}\right)\frac{1}{1+i(n_0+n)\tau}\right]\right\}$$

$$\bar{x} = b e^{int}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{n_0+n+i(n_0+n)^2\tau + n_0 - n - i(n_0-n)^2\tau}{n_0\left[1+in_0\tau+in\tau-in_0\tau+in\tau+(n_0^2-n^2)\tau^2\right]}\right\}$$

$$\bar{x} = b e^{int}\, 1 - \frac{2n_0 + 4in_0 n\tau}{2n_0\left[1+(n_0^2-n^2)\tau^2+2in\tau\right]} = b e^{int}\frac{(n_0^2-n^2)\tau^2}{1+(n_0^2-n^2)\tau^2+2in\tau}$$

$$\bar{x} = \frac{ae}{m(n_0^2-n^2)}\frac{(n_0^2-n^2)\tau^2}{\left[1+(n_0^2-n^2)\tau^2+2in\tau\right]} e^{int} = \frac{ae}{m\left[\frac{1}{\tau^2}+n_0^2-n^2+\frac{2in}{\tau}\right]} e^{int}$$

$$\bar{x} = \frac{ae}{m\left(n_0^2+\frac{1}{\tau^2}-n^2\right)+in\frac{2m}{\tau}} e^{int}$$

$$\int_0^\infty\left\{1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{n_0}\right)e^{i(n_0-n)\vartheta} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{n_0}\right)e^{-i(n_0+n)\vartheta}\right\}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(1+\frac{n}{n_0}\right)\frac{1}{1-i(n_0-n)\tau} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{n_0}\right)\frac{1}{1+i(n_0+n)\tau} \qquad \frac{1}{\tau}\int_0^\infty e^{u\vartheta-\frac{\vartheta}{\tau}} d\vartheta = \frac{1}{1-u\tau}$$

$$= 1 - \frac{1}{2n_0}\cdot\frac{(n_0+n)\left[1+i(n_0+n)\tau\right] + (n_0-n)\left[1-i(n_0-n)\tau\right]}{\left[1-i(n_0-n)\tau\right]\left[1+i(n_0+n)\tau\right]}$$

$$= 1 - \frac{1}{2n_0}\frac{2n_0 + i(n_0+n)^2\tau - i(n_0-n)^2\tau}{1-i(n_0-n)\tau+i(n_0+n)\tau+(n_0^2-n^2)\tau^2} = 1 - \frac{1}{2n_0}\frac{2n_0 + i2n_0 2n\tau}{1+i2n\tau+(n_0^2-n^2)\tau^2}$$

$$= \frac{1+2in\tau+(n_0^2-n^2)\tau^2-1-2in\tau}{1+2in\tau+(n_0^2-n^2)\tau^2} = \frac{(n_0^2-n^2)\tau^2}{1+2in\tau+(n_0^2-n^2)\tau^2} = \frac{1}{1+\frac{2in}{(n_0^2-n^2)\tau}+\frac{1}{(n_0^2-n^2)\tau^2}}$$

$$\bar{x} = \frac{ae}{m(n_0^2-n^2)\left[1+\frac{1}{(n_0^2-n^2)\tau^2}+\frac{2in}{(n_0^2-n^2)\tau}\right]} e^{int} = \frac{ae}{m\left(n_0^2+\frac{1}{\tau^2}-n^2\right)+in\frac{2m}{\tau}} e^{int}$$

Mit Reibung | Ohne Reibung, mit Stößen

$$x = \frac{ae}{m(n_0^2-n^2)+ing} e^{int} \qquad \bar{x} = \frac{ae}{m\left(n_0^2+\frac{1}{\tau^2}-n^2\right)+in\frac{2m}{\tau}} e^{int}$$

$g = \frac{2m}{\tau}$ elastische Kraft $(f) = f + \frac{m}{\tau^2}$ $\frac{1}{\tau^2}$ zunächst vernachlässigt

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = e(\mathfrak{E}_x + \alpha\mathfrak{P}_x) - fx - g\frac{dx}{dt}, \quad \mathfrak{P}_x = Nex$$

$$\frac{m}{Ne^2}\frac{d^2\mathfrak{P}_x}{dt^2} = \mathfrak{E}_x + \alpha\mathfrak{P}_x - \frac{f}{Ne^2}\mathfrak{P}_x - \frac{g}{Ne^2}\frac{d\mathfrak{P}_x}{dt}, \quad \frac{m}{Ne^2} = m', \frac{f}{Ne^2} = f', \frac{g}{Ne^2} = g'$$

$$\mathfrak{E}_x \sim e^{int} \quad \mathfrak{P}_x \sim e^{int} \quad \frac{d\mathfrak{P}_x}{dt} = in\mathfrak{P}_x \quad \frac{d^2\mathfrak{P}_x}{dt^2} = -n^2\mathfrak{P}_x$$

$$-m'n^2\mathfrak{P}_x = \mathfrak{E}_x + \alpha\mathfrak{P}_x - f'\mathfrak{P}_x - ing'\mathfrak{P}_x$$

$$\mathfrak{E}_x = (f'-\alpha-m'n^2)\mathfrak{P}_x + ing'\mathfrak{P}_x \quad \xi = f'-\alpha-m'n^2 \quad \eta = ng'$$

$$\mathfrak{E}_x = (\xi+i\eta)\mathfrak{P}_x = \left[\frac{m(n_0^2-n^2)+ing}{Ne^2} - \alpha\right]\mathfrak{P}_x$$

Ebene Wellen in z Richtung fortschreitend, nur $\mathfrak{E}_x, \mathfrak{P}_x, \mathfrak{D}_x$ und $\mathfrak{H}_y$ von Null verschieden und proportional $e^{in(t-qz)}$

Nach Maxwell $-\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{dz} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{D}_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial\mathfrak{E}_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}_y}{\partial t}$

$$\frac{\partial e^x}{\partial z} = e^x\frac{\partial x}{\partial z} \qquad inq\mathfrak{H}_y = \frac{1}{c}in\mathfrak{D}_x, \quad -inq\mathfrak{E}_x = -\frac{1}{c}in\mathfrak{H}_y$$

$$q\mathfrak{H}_y = \frac{1}{c}\mathfrak{D}_x, \quad q\mathfrak{E}_x = \frac{1}{c}\mathfrak{H}_y, \quad \mathfrak{D}_x = cq\mathfrak{H}_y = c^2q^2\mathfrak{E}_x$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{P}_x = \mathfrak{D}_x - \mathfrak{E}_x = (c^2q^2-1)\mathfrak{E}_x$$

$$\mathfrak{E}_x = \frac{1}{c^2q^2-1}\mathfrak{P}_x, \quad \mathfrak{E}_x = (\xi+i\eta)\mathfrak{P}_x$$

$$c^2q^2-1 = \frac{1}{\xi+i\eta}, \quad c^2q^2 = 1 + \frac{1}{\xi+i\eta}$$

q ist also komplex, wir setzen $q = \frac{1-i\kappa}{c\omega}$. dann ist

$$\frac{c^2(1-i\kappa)^2}{\omega^2} = 1 + \frac{1}{\xi+i\eta}$$

Reelle und imaginäre Bestandteile müssen jeder für sich gleich sein

$$\frac{c^2(1-\kappa^2)}{\omega^2} - i\frac{2\kappa c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\xi-i\eta}{\xi^2+\eta^2} = 1 + \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - i\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

$$\frac{c^2(1-\kappa^2)}{\omega^2} = 1 + \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}, \quad \frac{2\kappa c^2}{\omega^2} = \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$$

$$\frac{c^2}{\omega^2}-\frac{c^2\kappa^2}{\omega^2}=1+\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\,,\qquad \frac{2\kappa c^2}{\omega^2}=\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\qquad\qquad \frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}=b$$

$$\frac{c^2}{\omega^2}(1-\kappa^2)=1+\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}\,,\quad \kappa\frac{c^2}{\omega^2}=\frac{1}{2}\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}\qquad \frac{c^2}{\omega^2}=x\,,\ \kappa=y\qquad 1+\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}=a$$

$$x(1-y^2)=a\,,\quad xy=b\,,\quad x-xy^2=a\,,\quad x-y\,b=a\,,\quad x^2-b^2=ax$$

$$x^2-ax=b^2,\ \left(x-\frac{a}{2}\right)^2=b^2+\frac{a^2}{4}\,,\ x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}\,,\ 2x=a\pm\sqrt{4b^2+a^2}$$

$$2xy^2=2x-2a=-a\pm\sqrt{4b^2+a^2}\qquad 4b^2+a^2=\frac{\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}+1+\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}+\frac{\xi^2}{(\xi^2+\eta^2)^2}$$

$$2\frac{c^2}{\omega^2}=\sqrt{\frac{(\xi+1)^2+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}}+\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}+1\qquad 4b^2+a^2=\frac{1+2\xi+\xi^2+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}=\frac{(\xi+1)^2+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}$$

$$2\frac{c^2\kappa^2}{\omega^2}=\sqrt{\frac{(\xi+1)^2+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}}-\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}-1$$

Was bedeuten nun κ und ω. Es war $q=\frac{1-i\kappa}{\omega}$, wobei q durch Ansatz $e^{in(t-qz)}$ für die Welle definiert war. Es ist

$$e^{in(t-qz)}=e^{in(t-\frac{z}{\omega})}\,e^{-\frac{n\kappa}{\omega}z}$$

und die Welle ist proportional $e^{-\frac{n\kappa}{\omega}z}\ {\cos \atop \sin}\ n\left(t-\frac{z}{\omega}\right)$

d. h. $\frac{n\kappa}{\omega}=k$ ist der Absorptionskoeffizient und ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

<u>Berechnung von k und ω aus m, e, N, n_0, g und n</u>

$$2\frac{c^2}{\omega^2}=\sqrt{\frac{(\xi+1)^2+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}}+\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}+1\qquad \xi=\frac{m(n_0^2-n^2)}{Ne^2}-\alpha$$

$$2c^2\frac{k^2}{n^2}=\sqrt{\frac{(\xi+1)^2+\eta^2}{\xi^2+\eta^2}}-\left(\frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}+1\right)\qquad \eta=\frac{ng}{Ne^2}$$

Dispersionstheorie
für monochromatische Resonatoren.

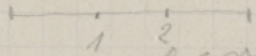
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -fx - g\frac{dx}{dt} + e\mathfrak{E}_x\,,\quad n_0^2 = \frac{f}{m}\,,\quad \mathfrak{E}_x = a e^{int}\,,\quad x = b e^{int}$$

$$-mbn^2 = -fb - gbin + ae\,,\quad b(f+ing-mn^2) = ae\,,\quad f = mn_0^2$$

$$b = \frac{ae}{m(n_0^2-n^2)+ing}\,;\quad x = be^{int}$$

$$\mathfrak{D}_x = \mathfrak{E}_x + \mathfrak{P}_x = \varepsilon\mathfrak{E}_x\,,\quad \mathfrak{P}_x = (\varepsilon-1)\mathfrak{E}_x = Nex\,,\quad \varepsilon - 1 = Ne\frac{x}{\mathfrak{E}_x}\,,\quad \varepsilon = 1+\frac{Nex}{\mathfrak{E}_x}$$

$$\frac{x}{\mathfrak{E}_x} = \frac{b}{a}\qquad \varepsilon = 1+\frac{Ne^2}{m(n_0^2-n^2)+ing} = \mu^2.$$



~~$0<r<\frac{l}{2}$~~

2 rechts von 1 $\quad W = \frac{l-r}{l}\frac{dr}{l}$

2 links von 1 $\quad W = \frac{l-r}{l}\frac{dr}{l}$ $\Big\}$ zus. $2\frac{l-r}{l}\frac{dr}{l}$

$$1 = \int_0^l 2\frac{l-r}{l}\frac{dr}{l} = \frac{2}{l^2}\int_0^l (l-r)\,dr = -\frac{2}{l^2}\frac{(l-r)^2}{2}\Big|_0^l = -0+1 = 1$$

$\frac{2}{l^2}(l-r)\,dr = dW$ daß r zwischen r u. dr liegt

$$\psi = \frac{e^2}{r} \qquad \bar{\psi} = \frac{\int_0^l \frac{e^2}{r}\frac{2}{l^2}(l-r)\,dr\,e^{-\frac{e^2}{rkT}}}{\int_d^l \frac{2}{l^2}(l-r)\,dr\,e^{-\frac{e^2}{rkT}}}$$

$$\bar{\psi} = e^2\frac{\int_d^l \frac{l-r}{r}e^{-\frac{e^2}{rkT}}\,dr}{\int_d^l (l-r)\,e^{-\frac{e^2}{rkT}}\,dr}$$

$$\frac{\frac{e^2}{r}}{kT} \ll 1 \quad \bar{\psi} = e^2\frac{\int_d^l \left(\frac{l}{r}-1\right)\left(1-\frac{e^2}{rkT}\right)dr}{\int_d^l (l-r)\left(1-\frac{e^2}{rkT}\right)dr} \qquad d\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\,dr$$

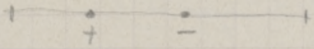
$$\int_d^l \left(\frac{l}{r}-1-\frac{l}{r^2}\frac{e^2}{kT}+\frac{e^2}{rkT}\right)dr = l\ln r - r + \frac{e^2 l}{kT}\frac{1}{r}+\frac{e^2}{kT}\ln r\Big|_d^l$$

$$\int_d^l \left(l-r-\frac{e^2 l}{kT}\frac{1}{r}+\frac{e^2}{kT}\right)dr = \left(l+\frac{e^2}{kT}\right)r - \frac{e^2 l}{kT}\ln r - \frac{r^2}{2}\Big|_d^l$$

$$\frac{e^2}{rkT} = 0 \quad \int_d^l \left(\frac{l}{r}-1\right)dr = l\ln r - r\Big|_d^l = l\ln\frac{l}{d} - l + d = l\ln\frac{l}{d}$$

$$\int_d^l (l-r)\,dr = lr - \frac{r^2}{2}\Big|_d^l = l^2 - ld - \frac{l^2}{2}+\frac{d^2}{2} = \frac{l^2}{2}$$

$$\bar{\psi} = e^2\frac{2\ln\frac{l}{d}}{l} = \frac{e^2}{l}2\ln\frac{l}{d} = \frac{e^2}{l}2\ln l = 0 \text{ für großes } l$$



$\frac{e^2}{r}$

$\iint \frac{dx_1}{l}\frac{dx_2}{l}$ genommen über alle Werte von x_1 und x_2, für die $x_1 - x_2 = r$ oder $-r$ ist, gibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Entfernung zwischen beiden Ionen gleich r ist, wobei gleichzeitig $0<x_1<l$ und $0<x_2<l$ gilt.

$x_1 = x_2 + r \quad dx_1 = dx_2$

Befindet sich 1 bei x_1, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 sich in der Entfernung r resp. $r+dr$ befindet, $\frac{2\,dr}{l}$, falls $r<x_1$ und $r<l-x_1$ ist, gleich $\frac{dr}{l}$, falls $x_1>r>l-x_1$ oder $x_1<r<l-x_1$, und gleich Null, falls $r>x_1$ und $r>l-x_1$ ist.

$0<r<\frac{l}{2}$

W für Fall 1 gleich $\frac{l-2r}{l}\frac{dr}{l}$

" 2a u. 2b " $\frac{r}{l}\frac{dr}{l}$ zus. $\frac{2r}{l}\frac{dr}{l}$ Sa. $\frac{dr}{l}$

" 3 " 0

$\frac{l}{2}<r<l$

" 1 " 0

" 2a u. 2b " $\frac{l-r}{l}\frac{dr}{l}$ zus. $2\frac{l-r}{l}\frac{dr}{l}$

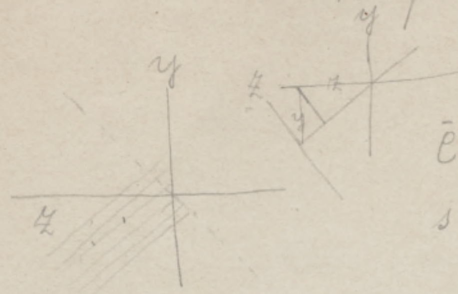
" 3 " 0

W dass r zw. 0 u. $\frac{l}{2}$ liegt ist $\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{dr}{l} = \frac{1}{l}\frac{l}{2} = \frac{1}{2}$

W " " " $\frac{l}{2}$ u. l " $\frac{2}{l^2}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-r)\,dr \quad x = l-r \quad dr = -dx$

$-\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \quad W = 2\cdot\frac{1}{l^2}\frac{(l-r)^2}{2}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l} = \frac{1}{l^2}\frac{l^2}{4} = \frac{1}{4}$

Interferenz der Röntgenstrahlen



$$s = y\cos(y,s) + z\cos(z,s) = y\beta + z\gamma \qquad \frac{2\pi}{\lambda} = k$$

$$e^{-iks} = e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}s} = \cos\frac{2\pi}{\lambda}s - i\sin\frac{2\pi}{\lambda}s$$

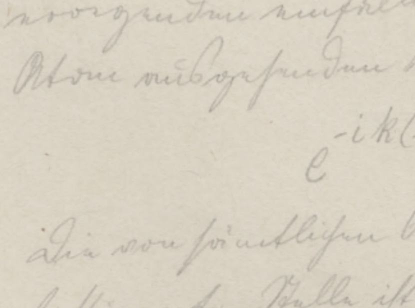
$$s = x\alpha_0 + y\beta_0 + z\gamma_0$$

Die Amplitude der einfallenden ebenen Welle wird zu irgend einer bestimmten Zeit dargestellt durch eine Konstante mal der Funktion $e^{-ik(x\alpha_0+y\beta_0+z\gamma_0)}$. Fällt die Welle auf ein Atom, so geht von diesem eine Kugelwelle aus, deren Amplitude zur gleichen Zeit in sehr großer Entfernung r durch die Funktion $\psi\frac{e^{-ikr}}{r}$ dargestellt wird. ψ ist eine Funktion von $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ und der Richtungskosinusse α, β, γ von r, außerdem von λ und der Natur des Atoms. Ist λ groß gegen die Atomdimensionen, so kann man keine Richtungen im Atom unterscheiden und ψ ist unabhängig von den Richtungskosinus und nach allen Richtungen gleich. Ferner ist aber die Amplitude der vom Atom ausgehenden erregten Welle natürlich proportional der Stärke der Erregung, d.h. der Amplitude der erregenden einfallenden Welle, sodaß die Amplitude der vom Atom ausgehenden Welle gleich einer Konstanten mal

$$e^{-ik(x\alpha_0+y\beta_0+z\gamma_0)}\,\psi\,\frac{e^{-ikr}}{r}$$ ist.

Die von sämtlichen Atomen herrührende Amplitude an einer bestimmten Stelle ist die Summe der von den einzelnen Atomen dort erregten Amplituden gleich

$$\sum \psi \frac{e^{-ik(r+x\alpha_0+y\beta_0+z\gamma_0)}}{r}$$

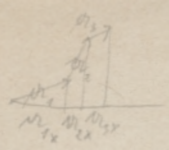


Statt r wird die Annäherung $r = R - (x\alpha + y\beta + z\gamma)$ gesetzt, da für r, die groß gegen die Kristalldimensionen sind, r und R sich nur durch die Projektion des vom Ursprungspunkt nach dem betreffenden Atom gezogenen Radiusvektors unterscheiden.

$$\psi\frac{e^{-ikR}}{R}\sum e^{ik[x(\alpha-\alpha_0)+y(\beta-\beta_0)+z(\gamma-\gamma_0)]}$$

Nun sind die Koordinaten x, y, z der Atome im Raumgitter:

$\tilde{V}$ an der Stelle $x\ y\ z$, wo sich das Atom befindet



$$X = m\,v_{1x} + n\,v_{2x} + p\,v_{3x} \qquad \alpha-\alpha_0$$
$$Y = m\,v_{1y} + n\,v_{2y} + p\,v_{3y} \qquad \beta-\beta_0$$
$$Z = m\,v_{1z} + n\,v_{2z} + p\,v_{3z} \qquad \gamma-\gamma_0$$

Also wird die Streuung

$$\psi \frac{e^{-ikR}}{R} \sum_{m,n,p} e^{ik\left[\begin{array}{l} m\{v_{1x}(\alpha-\alpha_0)+v_{1y}(\beta-\beta_0)+v_{1z}(\gamma-\gamma_0)\} \\ +n\{v_{2x}(\alpha-\alpha_0)+v_{2y}(\beta-\beta_0)+v_{2z}(\gamma-\gamma_0)\} \\ +p\{v_{3x}(\alpha-\alpha_0)+v_{3y}(\beta-\beta_0)+v_{3z}(\gamma-\gamma_0)\}\end{array}\right]}$$

$$= \psi \frac{e^{-ikR}}{R} \sum_{m,n,p} e^{i(mA+nB+pC)} = \psi \frac{e^{-ikR}}{R} \sum_{m=-M}^{m=M} e^{imA} \cdot \sum_{-N}^{+N} e^{inB} \sum_{-P}^{+P} e^{ipC}$$

$$\sum_{m=-M}^{m=M} e^{imA} = 1 + e^{iA} + e^{-iA} + e^{i2A} + e^{-i2A} + \dots + e^{iMA} + e^{-iMA}$$
$$= 1 + e^{iA} + (e^{iA})^2 + \dots + (e^{iA})^M + e^{-iA} + (e^{-iA})^2 + \dots + (e^{-iA})^M$$

$$\left(\begin{array}{l}1+a+a^2+\dots+a^n \\ = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}\end{array}\right) = \frac{1-e^{i(M+1)A}}{1-e^{iA}} + \frac{1-e^{-i(M+1)A}}{1-e^{-iA}} - 1 = \frac{(1-e^{i(M+1)A})(1-e^{-iA}) + (1-e^{-i(M+1)A})(1-e^{iA})}{(1-e^{iA})(1-e^{-iA})} - 1$$

$$= \frac{1-e^{i(M+1)A} - e^{-iA} + e^{i(M)A} + 1 - e^{-i(M+1)A} - e^{iA} + e^{-i(M)A}}{1-e^{iA}-e^{-iA}+1} - \frac{1-e^{iA}-e^{-iA}+1}{1-e^{iA}-e^{-iA}+1}$$

$$= \frac{\cancel{1}\mp e^{i(M+1)A} + e^{iMA} \mp e^{-i(M+1)A} + e^{-iMA}}{2-(e^{iA}+e^{-iA})} = \frac{\cancel{2}\,2\cos(M+1)A + 2\cos MA}{2-2\cos A}$$

$$\cancel{\frac{1+4\sin\frac{2M-1}{2}A\,\sin\frac{A}{2}}{1-2+4\sin^2\frac{A}{2}}} = \frac{-\cos(M+1)A \pm \cos MA}{1-\cos A} = \frac{\sin\frac{2M+1}{2}A}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\cancel{\frac{\sin\frac{2M+1}{2}A}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{e^{i\frac{2M+1}{2}A} - e^{-i\frac{2M+1}{2}A}}{e^{i\frac{A}{2}} - e^{-i\frac{A}{2}}} = \frac{e^{iMA}\cdot e^{i\frac{A}{2}} - e^{-iMA}\,e^{-i\frac{A}{2}}}{e^{i\frac{A}{2}} - e^{-i\frac{A}{2}}}}$$

$$\sum_{m=1}^{m=M} \cos ma = \frac{\cos MA - \cos(M+1)A + \cos A - 1}{2(1-\cos A)}$$

$$\sum_{m=-M}^{m=+M} e^{imA} = 1 + 2\sum_{m=1}^{m=M} \cos mA = 1\,\frac{\cos MA - \cos(M+1)A}{1-\cos A} = \frac{2\sin\frac{2M+1}{2}A\,\sin\frac{A}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}} = \frac{\sin\frac{2M+1}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

Streuung gleich $\psi \dfrac{e^{-ikR}}{R}\, \dfrac{\sin\frac{2M+1}{2}A}{\sin\frac{A}{2}}\, \dfrac{\sin\frac{2N+1}{2}B}{\sin\frac{B}{2}}\, \dfrac{\sin\frac{2P+1}{2}C}{\sin\frac{C}{2}}$

$$dW = P(E) = k\frac{1}{2^m}\, e^{-\frac{1}{kT}\left(\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\sum_{i=0}^{i=\mu-1}\frac{q_i q_\mu}{r_{i\mu}} - \frac{2N}{V}\frac{4}{3}\pi r_m^3\right)} \frac{2N}{V}dv_1\,\frac{2N}{V}dv_2 \cdots \frac{2N}{V}dv_m$$

Entfernungseinheit $\left(\frac{v}{2N}\right)^{\frac{1}{3}}$ Energieeinheit $kT = w$, $k_m = k\cdot\frac{1}{2^m}$

$$P(E) = k_m\, e^{-\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\sum_{i=0}^{i=\mu-1}\frac{q_i q_\mu}{r_{i\mu}} - \frac{4}{3}\pi r_m^3}\, dv_1\, dv_2 \cdots dv_m$$

$$= k_m\, e^{-\sum_{\mu=1}^{\mu=m}\sum_{i=0}^{i=\mu-1}\frac{q_i q_\mu}{r_{i\mu}} - \frac{4}{3}\pi r_m^3}\, d\varphi_1 \sin\vartheta_1\, d\vartheta_1\, r_1^2\, dr_1 \cdots d\varphi_m \sin\vartheta_m\, d\vartheta_m\, r_m^2\, dr_m$$

Milner: Die mittlere potentielle Energie von N pos. u. N neg. Ionen

ist: $\bar{\mathfrak{E}} = N\left(\frac{4\pi}{3}\frac{2N}{V}\right)^{\frac{1}{3}} q^2\, \Phi(h)$ q Ladung des Ions

$h = \left(\frac{4\pi}{3}\frac{2N}{v}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{q^2}{RT}$ $\Phi(h)$

$h =$	0	0,109	0,3	0,867
$\Phi(h) =$	0	−0,42	−0,66	−1,03

$\bar{\mathfrak{E}} = \overline{\sum \pm \frac{q^2}{r}} = NRTh\,\Phi(h)$ $\bar{\mathfrak{E}}$ negativ, da $\Phi(h)$ negativ

$W = -\bar{\mathfrak{E}},\ f(h) = -\Phi(h),\ W = RTh\,f(h)$

$pv = 2RT - \frac{1}{3}W,\ \frac{pv}{RT} = 2 - \frac{1}{3}h\,f(h)$

$h = \frac{1}{10}\left(\frac{8\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{q^{\frac{2}{3}}e^{\frac{4}{3}}}{KRT}\,C^{\frac{1}{2}}$ e Ladg. eines Grammäquivalentes
K Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels
C Konz. in Mol pro l

$h = 1,203 \cdot C^{\frac{1}{3}}$ für ein Ion $p = \frac{RT}{v}\left[1 - 0,2\,C^{\frac{1}{3}}f(h)\right]$

$f_0 = 1 - 0,2\,f(h)\sqrt[3]{C}$ Nach Messungen von Noyes u. Falk

$f_0 = 1 - 0,146\sqrt[3]{C}$, $f(h)$ daher gleich $\frac{0,146}{0,2} = 0,73$

Durchschnittlich $f_0 = 1 - 0,17\sqrt[3]{C}$ $f(h) = \frac{0,17}{0,2} = 0,85$

Bjerrum

1)

Aktivitätskoeffizient f_a und osmotischer Koeffizient f_o nach Bjerrum Z. f. El. 24, S. 325 (1918)

Lösung mit x Molen des Stoffes 1 und $(1-x)$ Molen des Stoffes

p_1 und p_2 ihre Dampfdrucke über der Lösung p_1^o und p_2^o der reinen Stoffe

$\pi_1 = \frac{RT}{v_o}\ln\frac{p_2^o}{p_2}$ für ideale Lösungen $\frac{p_2^o}{p_2} = \frac{1}{1-x}$

$\pi_1^i = -\frac{RT}{v_o}\ln(1-x)$ $\quad A_2^i = -RT\ln(1-x)$ $\quad A_2 = RT\ln\frac{p_2^o}{p_2}$

$\frac{\pi_1}{\pi_1^i} = f_o$ (Definition von Bjerrum), $f_o = \frac{\ln\frac{p_2}{p_2^o}}{\ln(1-x)}$, $\ln\frac{p_2}{p_2^o} = f_o\ln(1-x)$

$A_2 = -RTf_o\ln(1-x)$

$A_1^i = -RT\ln x$, $A_1 = -RT\ln\frac{p_1}{p_1^o}$, $\frac{p_1}{p_1^o} = f_a x$ (Definition v. Bjerrum)

$A_1 = -RT\ln(xf_a)$

Nach Duhem-Margules gilt:

$$x\frac{d\ln p_1}{dx} + (1-x)\frac{d\ln p_2}{dx} = 0 \text{ oder } x\frac{d\left[RT\ln\frac{p_1}{p_1^o}\right]}{dx} + (1-x)\frac{d\left[RT\ln\frac{p_2}{p_2^o}\right]}{dx} = 0$$

$$x\frac{dA_1}{dx} + (1-x)\frac{dA_2}{dx} = 0$$

$$p_1 = p_1^o f_a x,\quad \ln\frac{p_2}{p_2^o} = f_o\ln(1-x) = \ln(1-x)^{f_o},\quad p_2 = p_2^o(1-x)^{f_o}$$

$$x\frac{d\ln p_1}{dx} = x\frac{d\ln(f_a x)}{dx} = x\frac{1}{f_a x}\frac{d(f_a x)}{dx} = \frac{1}{f_a}\left(f_a + x\frac{df_a}{dx}\right) = 1 + x\frac{d\ln f_a}{dx}$$

$$(1-x)\frac{d\ln p_2}{dx} = (1-x)\frac{d[f_o\ln(1-x)]}{dx} = (1-x)\left[-f_o\frac{1}{1-x} + \ln(1-x)\frac{df_o}{dx}\right]$$

$$= -f_o + (1-x)\ln(1-x)\frac{df_o}{dx}$$

$$f_o - (1-x)\ln(1-x)\frac{df_o}{dx} = 1 + x\frac{d\ln f_a}{dx}$$

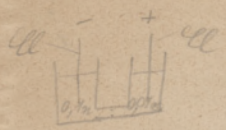
für kleine x wird $\ln(1-x) = -x$ und $(1-x)\ln(1-x) = -x$ also

$$f_o + x\frac{df_o}{dx} = 1 + x\frac{d\ln f_a}{dx},\quad x = \text{konst } c,\quad f_o + c\frac{df_o}{dc} = 1 + c\frac{d\ln f_a}{dc}$$

$\frac{0{,}762}{0{,}882} = \begin{array}{r} 0{,}8820-1 \\ -0{,}9455-1 \\ \hline 0{,}9365-1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{l} \lg 0{,}0591 = \\ +\lg 0{,}9365 = \end{array} \begin{array}{r} 0{,}7716-2 \\ 0{,}9715-1 \\ \hline 0{,}7431-2 \end{array}$ $\quad 0{,}0553_5$ $\quad \frac{0{,}932}{0{,}967} = \begin{array}{r} 0{,}9693-1 \\ -0{,}9863-1 \\ \hline 0{,}9830-1 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 0{,}7716-2 \\ 0{,}9926-1 \\ \hline 0{,}7642-2 \end{array} = 0{,}0581$

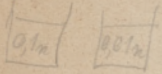
$\frac{0{,}969}{0{,}932} = \begin{array}{r} 0{,}9863-1 \\ -0{,}9693-1 \\ \hline 170 \end{array}$

2) 6.III.19



$\varepsilon = 0{,}0591 \log \frac{c_2}{c_1} \mathcal{V}$, $c_2 = 0{,}1n$, $c_1 = 0{,}01n$, $\frac{c_2}{c_1} = 10$, $\varepsilon = 0{,}0591 \mathcal{V}$

$A = \varepsilon\mathcal{E}\, dx = RT\, dx \ln\frac{\pi_2}{\pi_1}$ $\quad \varepsilon = \frac{RT}{\mathcal{E}} \ln\frac{c_2}{c_1}$ $\quad \pi_1 = RTc_1$, $\pi_2 = RTc_2$



$\pi = f_o \pi^o$ $\quad A = \int_{v_2}^{v_1} \pi\, dv = \int_{v_2}^{v_1} f_o \pi\, dv = f_o RT \ln\frac{v_1}{v_2}$

$RT \ln \frac{f_a^2}{f_a^1} = \int_{v_2}^{v_1} f_o \pi^o dv - RT \ln\frac{v_1}{v_2}$

$\int_{v_2}^{v_1} f_o\pi^o dv = RT\ln\frac{v_1 f_a^2}{v_2 f_a^1}$, $\pi_0 = \frac{RT}{v}$

$f_o = 1 + c\frac{d\ln f_a}{dc}$ $\quad d\ln f_a = \frac{f_o-1}{c}dc = (f_o-1)d\ln c = d\ln c^{(f_o-1)}$

$f_a = c^{(f_o-1)}$

$v_1 - v_2 = dv$ $\quad f_o\pi^o dv = RT\ln\frac{(v_1+dv)(f_a+df_a)}{v\, f_a}$

$\ln\frac{vf_a + f_a dv + v\, df_a}{v f_a} = \ln(1+d\ln v + d\ln f_a) = d\ln v + d\ln f_a$

$f_o d\ln v = d\ln v + d\ln f_a$, $f_o = 1+\frac{d\ln f_a}{d\ln v} = 1 + v\frac{d\ln f_a}{dv}$

$v = \frac{1}{c}$ $\quad d\ln v = -d\ln c$

$\int_{c_1}^{c_2}\left(f_o^1 + c\frac{df_o}{dc}\right)\frac{RT}{c}dc = f_o^1 RT\ln\frac{c_2}{c_1} + RT\frac{df_o}{dc}(c_2-c_1)$

$f_o = f_o^1 + c\frac{df_o}{dc}$ $\quad = RT\ln\frac{c_2 f_a^2}{c_1 f_a^1} = RT\ln\frac{c_2}{c_1} + RT\ln\frac{f_a^2}{f_a^1}$

$= RT\ln\frac{c_2}{c_1} + RT(f_o^1-1)\ln\frac{c_2}{c_1} + RT(f_o^2 - f_o^1)$

$\ln f_a^2 - \ln f_a^1 = (f_o^1-1)\ln c_2 + f_o^2 - (f_o^1 - 1$

$\ln f_a = (f_o^1-1)\ln c + f_o$ $\quad \frac{d\ln f_a}{dc} = (f_o^1-1)\frac{1}{c} + \frac{df_o}{dc}$

$c\frac{d\ln f_a}{dc} = f_o^1 - 1 + c\frac{df_o}{dc}$, $f_o^1 + c\frac{df_o}{dc} = 1 + c\frac{d\ln f_a}{dc}$

Bjerrum

3) 7.III.14

Gas

A Arbeit, die geleistet wird, wenn Gas sich von einem Volumen v, bei dem die idealen Gasgesetze nicht mehr gelten, sich auf das Volumen v_∞ ausdehnt.

$$A = \int_v^{v_\infty} p\,dv = RT\ln v_\infty - RT\ln(f_a v)$$ Definition von f_a.

Gegeben p als Funktion von v und zwar in der Form $p = f_0\frac{RT}{v}$, wobei $\lim_{v=v_\infty} f_0 = 1$ ist.
Zu berechnen f_a als Funktion von f_0.

$$RT\ln(f_a v) - RT\ln v_\infty = \int_{v_\infty}^{v} f_0\frac{RT}{v}dv,\quad \ln(f_a v) - \ln v_\infty = \int_{v_\infty}^{v} f_0\, d\ln v$$

Differenziert nach $d\ln v$: $$\frac{d\ln(f_a v)}{d\ln v} = f_0,\quad \frac{d\ln f_a}{d\ln v} + 1 = f_0,\quad f_0 = 1 + v\frac{d\ln f_a}{dv}$$

$$d\ln f_a = (f_0-1)\,d\ln v,\quad \ln f_a\Big|_{v_\infty}^{v} = \int_{v_\infty}^{v}(f_0-1)\,d\ln v,\quad \ln f_a = \int_{v_\infty}^{v} f_0\,d\ln v - \ln\frac{v}{v_\infty}$$

$$A = \int_{v_2}^{v_1}\pi\,dv = RT\int_{v_2}^{v_1} f_0\frac{dv}{v},\quad v = \frac{1}{c},\quad dv = -\frac{dc}{c^2},\quad \frac{dv}{v} = c\,dv = -\frac{dc}{c}$$

$$A = -RT\int_{c_2}^{c_1} f_0\,d\ln c = RT\int_{c_1}^{c_2}\frac{f_0}{c}dc,\quad f_0 = 1-\gamma c^{\frac{1}{3}},\quad A = RT\left[\int_{c_1}^{c_2} d\ln c - \gamma\int_{c_1}^{c_2} c^{-\frac{2}{3}}dc\right]$$

$$d(3c^{\frac{1}{3}}) = c^{-\frac{2}{3}}dc \qquad A = RT\left[\ln\frac{c_2}{c_1} - 3\gamma\left(c_2^{\frac{1}{3}} - c_1^{\frac{1}{3}}\right)\right]$$

$$f_0 = 1-\gamma c^{\frac{1}{3}},\quad \ln f_a c = \ln c - 3\gamma c^{\frac{1}{3}},\quad \ln f_a = -3\gamma c^{\frac{1}{3}}$$

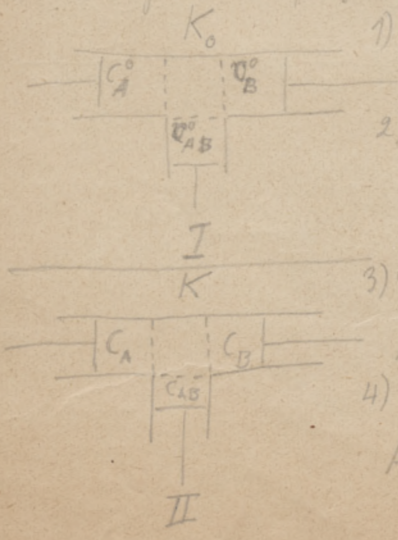
$$\frac{df_0}{dc} = -\frac{1}{3}\gamma c^{-\frac{2}{3}},\quad f_0 + c\frac{df_0}{dc} = 1 - \gamma c^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\gamma c^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{4}{3}\gamma c^{\frac{1}{3}}$$

Allgemein: $$f_0 + c\frac{df_0}{dc} = 1 + c\frac{d\ln f_a}{dc}$$

$$\frac{d\ln f_a}{dc} = \frac{f_0 + c\frac{df_0}{dc} - 1}{c} = -\frac{4}{3}\gamma c^{-\frac{2}{3}},\quad \ln f_a = -\frac{4}{3}\gamma\int c^{-\frac{2}{3}}dc = -4\gamma c^{\frac{1}{3}}$$

$$K = \frac{c_1\cdot c_2}{c_{12}},\quad \lim_{\substack{c_i=0\\ i=1,2,12}}\frac{c_1\cdot c_2}{c_{12}} = K_0,\quad \frac{c_1 f_1\cdot c_2 f_2}{c_{12} f_{12}} = K_0,\quad K\frac{f_1 f_2}{f_{12}} = K_0,\quad f_1 = f_2 = 1,\quad K\frac{1}{f_{12}} = K_0,\quad f_{12} = \frac{K}{K_0}$$

Folgender isothermer Kreisprozess:



1) Mit Maschinenteil I verwandle ich ein Mol A und ein Mol B in ein Mol AB

$A_1 = -2RT + RT$

2) Ich komprimiere das so gewonnene Mol AB bis zur Konzentration c_{AB}

$$A_2 = -\int_{v_{AB}}^{v_{AB}^0} p_{AB}\,dv = -\int_{c_{AB}^0}^{c_{AB}} p_{AB}\frac{dc_{AB}}{c_{AB}^2}$$

3) Mit Maschinenteil II spalte ich das Mol AB in ein Mol A und 1 Mol B

$$A_3 = 2RT - p_{AB}v_{AB} = 2RT - \frac{p_{AB}}{c_{AB}}$$

4) Ich dilutiere das Mol A von c_A auf c_A^0 und das Mol B von c_B auf c_B^0

$$A_4 = RT\ln\frac{c_A}{c_A^0} + RT\ln\frac{c_B}{c_B^0}$$

Bjerrum

7. III. 19

4)

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

$$\cancel{-2RT} + \frac{p^0_{AB}}{c^0_{AB}} - \int_{c^0_{AB}}^{c_{AB}} \frac{p_{AB}}{c^2}\, dc \cancel{+2RT} - \frac{p_{AB}}{c_{AB}} + RT \ln c_A c_B - RT \ln c^0_A c^0_B = 0$$

$$K = \frac{c_A c_B}{c_{AB}}, \quad K_0 = \frac{c^0_A c^0_B}{c^0_{AB}} = \frac{c_A c_B}{f_a c_{AB}}, \quad \ln c^0_A c^0_B = \ln K_0 + \ln c^0_{AB}$$

$$\ln c_A c_B = \ln K_0 + \ln f_a c_{AB}$$

$$RT(\ln c_A \cdot c_B - \ln c^0_A c^0_B) = [\ln (f^c_a c_{AB}) - \ln c^0_{AB}]\, RT$$

$$RT \ln (f^c_a c_{AB}) = RT \ln c^0_{AB} + \int_{c^0_{AB}}^{c_{AB}} \frac{p_{AB}}{c^2_{AB}}\, dc_{AB} + \frac{p_{AB}}{c_{AB}} - \frac{p^0_{AB}}{c^0_{AB}}$$

$$p_{AB} = f^c_o RT c_{AB}, \quad \frac{p_{AB}}{c_{AB}} = f^c_o RT, \quad f^0_o = 1, \quad \frac{p_{AB}}{c_{AB}} - \frac{p^0_{AB}}{c^0_{AB}} = (f^c_o - 1) RT$$

$$\int_{c^0_{AB}}^{c_{AB}} \frac{p_{AB}}{c^2}\, dc = RT \int_{c^0_{AB}}^{c_{AB}} \frac{f^c_o}{c_{AB}}\, dc_{AB}$$

$$\ln (f^c_a c_{AB}) = \ln c^0_{AB} + \int_{c^0_{AB}}^{c_{AB}} \frac{f^c_o}{c_{AB}}\, dc_{AB} + f^c_o - 1$$

$$\frac{d \ln (f^c_a c_{AB})}{d c_{AB}} = \frac{f^c_o}{c_{AB}} + \frac{d f^c_o}{d c_{AB}}, \quad \frac{d \ln f_a}{dc} + \frac{1}{c} = \frac{f_o}{c} + \frac{d f_o}{dc}$$

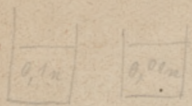
$$f_o + c \frac{d f_o}{dc} = 1 + c \frac{d \ln f_a}{dc}$$ wie bei Bjerrum

Schwindel bei dieser Ableitung, daß die [illegible] $\Pi\, c_{AB}$ auf beiden Seiten der semipermeablen Wand gleichgesetzt wird.

Thermodynamisches Potential $\psi = u - Ts + pv = F + pv$

$$\psi = u_{v_\infty} - RT \ln v - c_{v_\infty} T \ln T + pv + S_0 T = pv - RT \ln v + f(T)$$

Maximale Arbeit, die man zur Überführung von dx Molen aus einer x_1 n in eine x_2 n Lösung braucht.



1) Ich trenne von der x_1 n Lösung einen Raum ab, der dx Mole enthält. Darin sind $dx\frac{1-x_1}{x_1}$ Mole Lösungsmittel enthalten.

~~2) Ich presse aus der x_2 normalen Lösung $dx\frac{1-x_1}{x_1}$ Mole Lösungsmittel heraus. Arbeit~~ $A_2 = 0$

$$\cancel{A_2 = -\pi_2 v_0 dx\frac{1-x_1}{x_1}}$$

~~3) und füge dies der ersten Lösung zu~~

$$\cancel{A_3 = \pi_1 v_0 dx\frac{1-x_1}{x_1}}$$

2) Ich presse aus der zweiten Lösung soviel Lösungsmittel heraus als dx Mole gelöster Stoff entspricht, das sind $dx\frac{1-x_2}{x_2}$ Mole

$$A_2 = -\pi_2 v_0 dx\frac{1-x_2}{x_2}$$

3) Davon füge ich $dx\frac{1-x_1}{x_1}$ Mole der ersten Lösung hinzu

$$A_3 = \pi_1 v_0 dx\frac{1-x_1}{x_1}$$

4) Den Rest (d. h. $dx\left(\frac{1-x_2}{x_2}-\frac{1-x_1}{x_1}\right)$ Mole) füge ich dem abgetrennten Teil der ersten Lösung hinzu

$$A_4 = \int_{\pi_2}^{\pi_1}\pi\, dv$$

5) Ich füge dies zur zweiten Lösung. $A_5 = 0$

$$A = \int_{\pi_1}^{\pi_2}\pi\, dv + \left(\pi_1\frac{1-x_1}{x_1} - \pi_2\frac{1-x_2}{x_2}\right)v_0\, dx$$

$\pi = -\frac{RT}{v_0}\ln(1-x)$ ideal $dA = \pi\, dv$ Arbeit, wenn die Konz. von x auf $x-dx$ sinkt,

$\pi\, dv = -RT\, dn \ln(1-x) = dA$ falls man dn Mole Lösungsmittel hineintreten lässt

$dv = dn \cdot v_0$, $\pi = -\frac{RT}{v_0}\ln(1-x)$

Für nichtideale Lösungen: $dA = \pi\, dv = \pi\, dk\, v_0$, falls man dk Mole Lösungsmittel hineintreten lässt. dA Arbeit, wenn man g Mole gelösten Stoff von der Konz. x sich verdünnen lässt auf die Konz. $x-dx$. $\frac{g}{l} = \frac{x}{1-x}$ $\frac{g}{l+dl} = \frac{x-dx}{1-x+dx}$, $\frac{g}{l}\left(1-\frac{dl}{l}\right) = \frac{(x-dx)\left(1-\frac{dx}{1-x}\right)}{1-x} = \frac{x-dx-dx\frac{x}{1-x}}{1-x}$

$= \frac{x\left(1-\frac{dx}{x}-dx\frac{1}{1-x}\right)}{1-x} = \frac{x}{1-x}\left[1-dx\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right]\right]$, $\frac{dl}{l} = dx\frac{1}{x(1-x)}$, $l = g\frac{1-x}{x}$, $dl = dx\, g\frac{1-x}{x^2(1-x)}$

$dl = g\frac{dx}{x^2}$, $\pi\, dv = \pi v_0 g\frac{dx}{x^2}$ $A = v_0 dx\int_{\pi_1}^{\pi_2}\pi\frac{dx}{x^2}$

$\frac{d\ln(1-x)}{dx} = -\frac{1}{1-x}$, $\frac{d\frac{1}{x}}{dx} = -\frac{1}{x^2}$, $\pi = -\frac{RT}{v_0}\ln(1-x)$ $A = -RT\, dx\int_{x_2}^{x_1}\ln(1-x)\frac{dx}{x^2}$

$d(1-x) = -dx$

$\frac{d\left(\frac{1}{1-x}\right)}{dx} = \frac{dx}{1-x^2}$

$\boxed{x}$ $\boxed{x'}$

p_1^0	p_2^0	Arbeit um dx Mol 2 von x auf x' zu transportieren
p_1	p_2	$RTdx + RTdx \ln \frac{p_2}{p_2'} - RTdx = RTdx \ln \frac{p_2}{p_2'}$
$1-x$	x	
p_1'	p_2'	Ideal $p_2 = p_2^0 x$, $p_2' = p_2^0 x'$ $\quad RTdx \ln \frac{x}{x'}$
$1-x'$	x'	

Epstein

x eindimensionaler Resonator

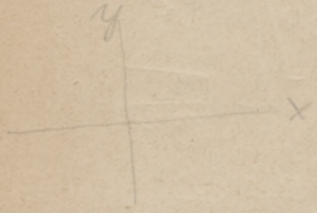
potentielle En. $U = \frac{a^2}{2}x^2$, kinetische En. $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$

$$H = T + U = \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{m}{2}\dot{x}^2, \quad p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad H = \frac{a^2}{2}q^2 + \frac{1}{2m}p^2$$

$$\dot{q} = \frac{dH}{dp} = \frac{p}{m} = \dot{x}, \quad \dot{p} = -\frac{dH}{dq} = -a^2 q = -a^2 x$$

$$H = H(p, q), \quad p = \frac{dV}{dq}, \quad \frac{dV}{dt} + H\left(\frac{dV}{dq}, q\right) = 0$$

$$V = At + W, \quad A + H\left(\frac{dW}{dq}, q\right) = 0, \quad A + \frac{a^2}{2}q^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW}{dq}\right)^2 = 0$$



$$U = \frac{a^2}{2}(x^2 + y^2), \quad T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad p_y = m\dot{y}$$

$$H = U + T = \frac{a^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2m}p_x^2 + p_y^2$$

$$A + \frac{a^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2\right] = 0$$

$$W = W_1(x) + W_2(y), \quad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW_1}{dx}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{dW_2}{dy}$$

$$\left[A + \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2\right] = -\left[\frac{a^2}{2}y^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_2}{dy}\right)^2\right]$$

$$A + \frac{a^2}{2}x^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_1}{dx}\right)^2 = -\beta, \quad \frac{a^2}{2}y^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{dW_2}{dy}\right)^2 =$$

$$\frac{dW_1}{dx} = \sqrt{2m\left(-\beta - A - \frac{a^2}{2}x^2\right)}, \quad \frac{dW_2}{dy} = \sqrt{2m\left(\beta - \frac{a^2}{2}y^2\right)}$$

$$W = \int_0^x \sqrt{2m\left(-\beta - A - \frac{a^2}{2}x^2\right)}\,dx + \int_0^y \sqrt{2m\left(\beta - \frac{a^2}{2}y^2\right)}\,dy$$

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta', \quad \int_0^x \frac{dx \cdot -m}{\sqrt{2m\left(-A - \beta - \frac{a^2}{2}x^2\right)}} + \int_0^y \frac{dy \cdot m}{\sqrt{2m\left(\beta - \frac{a^2}{2}y^2\right)}} = \beta'$$

$q_1\ q_2\ q_3 \quad T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \quad U = +\frac{1}{2}(ax^2+by^2+cz^2) \quad H = T+U, \ p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},\ p_y = m\dot{y},\ p_z = m\dot{z}$

$H = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) - \frac{1}{2}(ax^2+by^2+cz^2), \quad H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{1}{2}(ax^2+by^2+cz^2) = \alpha_1$

$W = W_1(x) + W_2(y) + W_3(z), \quad p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{dW_1(x)}{dx},$ {$W_1(x) = \int m\dot{x}\,dx$ unbrauchbar, weil W_1 eine Funktion von x nicht $\dot{x}$ sein soll, Differentialgleichung für Hamiltonsche [illegible]}

$\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + max^2\right] + \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + mby^2\right] + \left[\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 + mcz^2\right] = 2m\alpha_1$, diese Gleichung wird sicher erfüllt, wenn die [ ] Ausdrücke Konstante sind:

$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + max^2 = \alpha_2, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{\alpha_2 - max^2}, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \sqrt{\alpha_3 - mby^2}, \quad \frac{\partial W}{\partial z} = \sqrt{2m\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - mcz^2}$

$W = \int \frac{\partial W}{\partial x}dx + \int \frac{\partial W}{\partial y}dy + \int \frac{\partial W}{\partial z}dz \quad \int\sqrt{\alpha_2 - max^2}\,dx = \alpha_2\int\sqrt{1 - \frac{ma}{\alpha_2}x^2}\,dx, \quad \frac{ma}{\alpha_2}x^2 = y^2 \quad \sqrt{1+\frac{ma}{\alpha_2}x^2}$

$\int \frac{\partial W}{\partial x}dx = \left(\frac{\alpha_2}{ma}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha_2 \int\sqrt{1-y^2}\,dy$ ~~$= \left(\frac{\alpha_2}{ma}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{1+y^2} + \frac{1}{2}\lg\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\right] = \frac{1}{2}x\sqrt{\alpha_2+max^2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_2^{\frac{3}{2}}}{ma}\lg\left[\left(\frac{ma}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{2}}x + \right]$~~

~~$2\int_{a_i}^{b_i} p_i\,dq_i = nh = \int_{a_i}^{b_i}\frac{\partial W}{\partial q_i}dq_i \quad \int_{a_x}^{b_x} p_x\,dx = nh \quad p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = 0$ für $\sqrt{\alpha_2 + max^2} = 0,\ x = \sqrt{\frac{-\alpha_2}{ma}}$~~

~~$2\int_{-\sqrt{\frac{-\alpha_2}{ma}}}^{+\sqrt{\frac{-\alpha_2}{ma}}}\sqrt{\alpha_2 + max^2}\,dx = nh = \frac{1}{2}x\sqrt{\alpha_2+max^2} + \frac{1}{2}\frac{\alpha_2^{\frac{3}{2}}}{ma}\lg\left[\left(\frac{ma}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{2}}x + \sqrt{1+\frac{ma}{\alpha_2}x^2}\right]$~~

~~$nh = 0 + \frac{1}{2}$~~

~~Für den einfachsten Fall $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,\ p = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},\ H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}ax^2 = \alpha_1,\ p = \frac{\partial W}{\partial x},\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = 2m\alpha_1 - max^2$~~

~~$p = \frac{\partial W}{\partial x} = 0$ für $2\alpha_1 + max^2 = 0$ d. h. $x^2 =$~~

$p_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \sqrt{\alpha_2 - max^2} \quad p_x = 0$ für $\alpha_2 = max^2$, d. h. $x = \pm\sqrt{\frac{\alpha_2}{ma}}$, $2\int_{-\sqrt{\frac{\alpha_2}{ma}}}^{+\sqrt{\frac{\alpha_2}{ma}}}\sqrt{\alpha_2 - max^2}\,dx = n_1 h, \quad +\sqrt{\frac{\alpha_2}{ma}} = b$

$n_1 h = 2\sqrt{ma}\int_{-b}^{+b}\sqrt{b^2-x^2}\,dx = \sqrt{ma}\,x\sqrt{b^2-x^2} + \sqrt{ma}\,b^2 \arcsin\frac{x}{b}\Big|_{-b}^{+b} = b^2\sqrt{ma}\left[\arcsin(+1) - \arcsin(-1)\right]$

$n_1 h = b^2\sqrt{ma}\,\pi = \frac{\alpha_2}{\sqrt{ma}}\pi, \quad n_2 h = \frac{\alpha_3}{\sqrt{mb}}\pi, \quad n_3 h = \frac{2m\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3}{\sqrt{mc}}\pi$

Für den einfachsten Fall ist $p = \frac{dW}{dx} = \sqrt{2m\alpha_1 - max^2}, \quad nh = \frac{2m\alpha_1}{\sqrt{ma}}\pi, \quad (2\pi\nu)^2 m = a, \quad \sqrt{ma} = 2\pi\nu m$

$nh = \frac{2m\alpha_1\pi}{2\pi\nu m} = \frac{\alpha_1}{\nu}, \quad \alpha_1 = n\,h\nu$

$\sqrt{ma} = 2\pi\nu_1 m, \quad \sqrt{mb} = 2\pi\nu_2 m, \quad \sqrt{mc} = 2\pi\nu_3 m, \quad n_1 h = \frac{\alpha_2}{2m\nu_1}, \quad n_2 h = \frac{\alpha_3}{2m\nu_2}, \quad n_3 h = \frac{\alpha_1}{\nu_3} - \frac{\alpha_2+\alpha_3}{2m\nu_3}$

$\alpha_2 + \alpha_3 = 2mh(n_1\nu_1 + n_2\nu_2), \quad \frac{\alpha_2+\alpha_3}{2m} = h(n_1\nu_1 + n_2\nu_2), \quad \alpha_1 = hn_3\nu_3 + \frac{\alpha_2+\alpha_3}{2m} = h(n_1\nu_1 + n_2\nu_2 + n_3\nu_3)$

$H(p_i, q_i) = \alpha_1, \quad p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + \cdots, \quad p_i = \frac{dW_i}{dq_i}, \quad W_i = \int_0^{q_i} p_i\,dq_i, \quad p_i = \sqrt{\Phi_i(q_i)} = \sqrt{2\varphi_i(q_i) + 2\alpha_1\varphi_{i1}(q_i) + 2\alpha_2\varphi_{i2}(q_i)}$

$t + \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial}{\partial \alpha_1}\sum_i \int_0^{q_i}\sqrt{\Phi_i(q_i)}\,dq_i = \sum_i \int_0^{q_i}\frac{\varphi_{i1}(q_i)}{\sqrt{\Phi_i(q_i)}}dq_i, \quad \overline{W}_i = 2\int_{a_i}^{b_i} p_i\,dq_i$

$\frac{\sigma}{\eta} = \lambda, \quad \lambda_0 = \Gamma \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \frac{\left(\frac{e}{m_H}\right)^{\frac{3}{2}} l}{\sqrt{\frac{kT}{2e}} \sqrt{\frac{m}{m_H}}}, \quad \Gamma = \frac{D+2}{3}, \quad l = \frac{1}{\pi n \varsigma^2}$ n [illegible] Molekülen pro cm^3

ς Summe d. [illegible] + Mol. rad.

$\psi(u) = u^3\left\{\left[\frac{\pi}{2} - Si(u)\right]^2 + \left[Ci(u)\right]^2\right\}$, $Si(u) = \int_0^u \frac{\sin u}{u}\,du$

$\frac{\pi}{2} - \int_0^u \frac{\sin u}{u}\,du = \int_u^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$ $\qquad Ci(u) = -\int_u^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$

$Si(u) = x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{5!} - + \dots$

$\sin u = \frac{u}{1!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - + \dots \int_0^u \frac{\sin u}{u} = u - \frac{1}{3}\frac{u^3}{3!} + \frac{1}{5}\frac{u^5}{5!} - + \dots$

$Ci(u) = C + \ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{4!} - +$

$u = 1 \quad \psi = 0{,}5 \quad Si(u) = 0{,}9461 \quad Ci(u) = 0{,}3374$

$\frac{\pi}{2} = 1{,}5708$ $\qquad \lg 0{,}6247 = 0{,}7957 - 1 \cdot 2$ $\qquad \lg 0{,}3374 = 0{,}5281 - 1 \cdot 2$

$-\,0{,}9461$ $\qquad N\,0{,}5914 - 1$ $\qquad 5 \quad N\,0{,}0562 - 1$

$0{,}6247$

$0{,}3903$

$0{,}1138$

$0{,}5041$

$u = 0{,}1 \quad Si(u) = 0{,}1 \quad Ci(u) =$

$u \ll 1 \quad Si(u) = u \quad Ci(u) = C + \ln u$

$\psi(u) = u^3\left\{\frac{\pi^2}{4} - \pi u + C^2 + 2C\ln u + (\ln u)^2\right\} =$

$= u^3\left[\frac{\pi^2}{4} + C^2 + \frac{2(C+1)}{3}(\ln u)\right\} \qquad u^3 = kc$

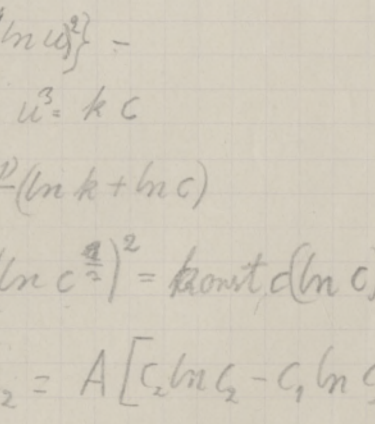
$= u^3\,\frac{2(C+1)}{3}\ln u^3 = kc^{\frac{2(C+1)}{3}}(\ln k + \ln c)$

$\psi(u) = \frac{k\,2(C+1)}{3}\,c\ln c = \text{konst}\; c\left(\ln c^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \text{konst}\; c(\ln c)^2$

$\mu_\infty - \mu_1 = A c_1 \ln c_1 \qquad \mu_1 - \mu_2 = A\left[c_2 \ln c_2 - c_1 \ln c_1\right]$

$\mu_\infty - \mu_2 = A c_2 \ln c_2$

$\mu_\infty - \mu = k_1 f(k_2 c)$



$$\psi(\kappa) = C_1 + C_2 \ln c + C_3 c^2 + C_4 c^4$$

[illegible]: [illegible], [illegible]
[illegible]: [illegible], [illegible], [illegible], [illegible], [illegible]

$$C_1' + C_2' \ln(\kappa c) + C_3' (\cancel{\kappa} c)^2$$

~~[illegible]~~

$$\frac{\mu_\infty - \mu}{\cancel{\quad}} = A \left\{ C_1' + C_2' \ln(\kappa c) + C_3' (\kappa c)^2 \ldots \right\}$$

$\mu_\infty - \mu_2$

$$\frac{\cancel{\mu_?}}{\mu_2} \Rightarrow$$

Die Bedeutung der Quantentheorie als beherrschendes Problem der modernen Physik.

M. D. u. H.

Ich möchte ~~vers~~ Ihnen in ganz großen Zügen, und soweit dies in allgemeinverständlicher Weise überhaupt möglich ist, klarzulegen versuchen, weshalb die Physik und besonders die theoret. Physik, augenblicklich so außerordentlich reizvoll und spannend ist, so daß die heutzutage auf diesem Gebiet arbeitenden Forscher mit solcher Leidenschaftlichkeit und Begeisterung bei der Sache sind. Es kommt dies daher, daß fast auf allen Gebieten des ausgedehnten Reiches, das die moderne Physik darstellt, die letzten Fragen, zu denen der Forscher geführt wird, alle auf einen Punkt hinzielen: die Quantentheorie. Die Quantentheorie ist in Wirklichkeit gar keine Theorie, sondern ein Problem, aber ein Problem, dessen vorläufig noch ganz unzulängliche ganz provisorische Lösungsversuche uns bereits den tiefsten Einblick in die verschiedensten der Forschung bisher völlig unzugänglichen Probleme gestattet haben. Die Theorie der Wärmestrahlung, der spez. Wärmen der Gase und der festen Stoffe, die Theorie des chemischen Gleichgewichts, der photochemischen und photoelektrischen Prozesse und schließlich das ganze ungeheure bisher völlig dunkle Gebiet der Spektrallinien einschließlich der Röntgenspektren werden beherrscht und erklärt von den gar merkwürdigen und unerklärlichen Rechenregeln, welche man als Quantentheorie bezeichnet.

$m\frac{d^2x}{dt^2} = -C^2x - e\mathcal{E}_x$, $\mathcal{E}_x = a\sin(2\pi\nu t) = a e^{-i2\pi\nu t}$, $x = b e^{-i2\pi\nu t}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = -b(2\pi\nu)^2 e^{-i2\pi\nu t}$

$-mb(2\pi\nu)^2 = -C^2 b - ea$, $b\left[m(2\pi\nu)^2 - C^2\right] = ea$, $b = \frac{e}{m(n^2-n_0^2)}a$, $n_0 \ll n$, $b = \frac{e}{mn^2}a = \frac{e\,a}{m4\pi^2\nu^2}$

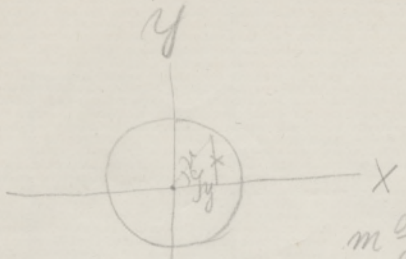
$W = W_0 e^{-\gamma ct}$, $\gamma = \frac{8\pi^2}{3}\frac{\eta e}{c\lambda^2} = \frac{8\pi^2}{3}\frac{e^2}{mc^2\lambda^2}$ $\nu = \frac{c}{\lambda}$, $\lambda^2 = \frac{c^2}{\nu^2}$, $\gamma = \frac{8\pi^2}{3}\frac{e^2\nu^2}{mc^4}$

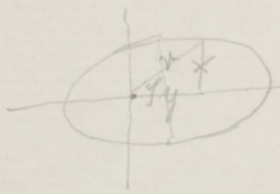
$\ln W = \ln W_0 - \gamma ct$, $\frac{d\ln W}{dt} = -\gamma c$, $\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = -\gamma c$, $dW = -\gamma c W dt = -\frac{8\pi^2}{3}\frac{e^2\nu^2}{mc^3}W dt$

$W = \frac{C^2}{2}x_0^2$, $x_0 = b$, $W = \frac{C^2}{2}b^2 = \frac{C^2}{2}\frac{e^2 a^2}{m^2 16\pi^4\nu^4}$, $ka^2 = \mathcal{E}_f$ $d\mathcal{E}_f = k a_f^2 c\,dt$, $d\mathcal{E}_a = -\frac{8\pi^2}{3}\frac{e^2\cancel{\nu^2}}{mc^3}\frac{C^2}{2}\frac{e^2a^2}{m^2 16\pi^4\cancel{\nu^4}\nu^2}dt$

$C^2 = m(2\pi\nu)^2$ $d\mathcal{E}_a = \frac{\cancel{8\pi^2} e^4 \cancel{m 4\pi^2\nu^2} a^2}{3\cancel{m}c^3\cancel{2}m^2\underbrace{\cancel{16\pi^4\nu^2}}_{4\pi^2}}dt = \frac{8e^4a^2}{3m^2c^3}dt$, $\frac{d\mathcal{E}_f}{d\mathcal{E}} = \frac{1}{3k}\frac{e^4}{m^2c^4}$

Richtg der Zeit. Scheinbar selbstverständlich. Ich weiß, daß dieser Augenblick, den ich jetzt erlebe, später ist als alle vergangenen und früher als alle kommenden. Anscheinend ist dies überhaupt die Definition für die Zeitrichtung. Jedoch wissenschaftliche Definition verlangt, da obige nicht objektiv. Denken wir uns irgend einen Vorgang kinematographisch aufgenommen, z.B. das Ausschwingen eines Pendels. Ist es dann, wenn mir der Film gegeben wird, nur dadurch möglich, die Richtung festzustellen in der ich ihn ablaufen lassen muß, daß ich es mir von einem Menschen der dabei gewesen ist, sagen lasse (Uhr unbrauchbar)? Nein, sondern wenn ich genau zusehe, bemerke ich, daß die Schwingungen in einer Richtung immer kleiner werden, das ist das die Zeitrichtung (Reibung). Das wissenschaftliche Kriterium der Zeitrichtung ist also die Zunahme der Entropie, ~~Das~~ d.h. in einem abgeschlossenen System (idealer Grenzfall) nenne ich die Zeitpunkte die späteren, in denen die Entropie des Systems größer ist. Dieses Kriterium kann versagen, z.B. Gefäß mit Partikelchen am Boden. Höhe der Partikelchen infolge Brownscher Bewegung schwankend. Entropie nimmt bald zu, bald ab. Zeitrichtung durch System allein (kinemat. Film) nicht feststellbar. Analoge Schwierigkeit bei Welt. In dem unendlich kleinen Raum-Zeit-Element, das wir von der Welt kennen, ist Zeitrichtung so im benachbarten vielleicht entgegengesetzt. Genau wie bei oben und unten (Antipoden.





$\varphi = \omega t$, $x = r\sin\varphi$, $y = r\cos\varphi$

$x = r\sin\omega t$, $y = r\cos\omega t$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,\quad \frac{X}{Y} = \frac{x}{y},\quad xY - yX = 0$$

$$m\left(\cancel{x}\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0 = m\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)$$

$$m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \text{konst}$$

$$x = r\sin\varphi,\quad \frac{dx}{dt} = r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \sin\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$y = r\cos\varphi\quad \frac{dy}{dt} = -r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \cos\varphi\frac{dr}{dt}$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \cancel{r^2}\Big\{ -r^2\sin^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} + r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{dt} - r^2\cos^2\varphi\frac{d\varphi}{dt} - r\sin\varphi\cos\varphi\frac{dr}{dt} = -r^2\frac{d\varphi}{dt}$$

$$m r^2\frac{d\varphi}{dt} = \text{konst} = P$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = r^2\cos^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \sin^2\varphi\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2$$

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] - \frac{e^2}{r} = \text{konst}\quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2\sin^2\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \cos^2\varphi\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2 -$$

$$\frac{m}{2}\left[r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] - \frac{e^2}{r} = \text{konst} = -U,\quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{P^2}{m^2 r^4}$$

$$\frac{\cancel{m}}{2}\frac{P^2}{m^{\cancel{2}} r^2} + \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{e^2}{r} = -U,\quad \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{e^2}{r} - U - \frac{P^2}{2m}\frac{1}{r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2e^2}{m}\frac{1}{r} - \frac{2U}{m} - \frac{P^2}{m^2}\frac{1}{r^2}}\qquad \frac{d\frac{1}{r}}{dt} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt},\quad \frac{dr}{dt} = -r^2\frac{d\frac{1}{r}}{dt}$$

$$r = \frac{ep}{1 - e\cos\varphi},\quad \frac{dr}{dt} = -\frac{e^2 p\sin\varphi}{(1 - e\cos\varphi)^2}\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{r^2\sin\varphi}{p}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$1 - e\cos\varphi = \frac{ep}{r},\quad \cancel{e}\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{\cancel{e}p}{r^2}\frac{dr}{dt},\quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{p}{r^2\sin\varphi}\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{P}{m} = -\frac{p}{\sin\varphi}\frac{dr}{dt},\quad \cos\varphi = \frac{1}{e} - \frac{p}{r},\quad \sin\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2} - \frac{p^2}{r^2} + \frac{2p}{er}}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\sin\varphi P}{mp} = -\frac{P}{mp}\sqrt{1 - \frac{1}{e^2} - \frac{p^2}{r^2} + \frac{2p}{er}}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{P}{mr^2},\quad r^2 = \frac{ep}{(1 - e\cos\varphi)^2},\quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{P}{mep}(1 - e^2\cos\varphi)^2,\quad \cos\varphi = y,\quad dy = -\sin\varphi\, d\varphi$$

$$d\varphi = -\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}},\quad \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}\,(1 - y)^2} = \text{konst}\, dt$$

$m\omega^2 r = p = \frac{h}{2\pi}$ $\mathcal{E} = \text{konst} - \frac{e^2}{r} + \frac{1}{2}mv^2$, $mv^2 = \frac{e^2}{r}$, $\mathcal{E} = \text{konst} - \frac{e^2}{2r}$ W

$W = \text{konst} - \mathcal{E} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{r} = \frac{h\nu}{2}$, $\omega = 2\pi\nu$, $\frac{e^2}{r} = \frac{h\omega}{2\pi}$, $\frac{h}{2\pi} = \frac{e^2}{r\omega} = \frac{mv^2}{\omega}$

$v = r\omega$, $\frac{h}{2\pi} = \frac{m r^2\omega^2}{\omega} = m\omega r^2$, $m r^2\omega^2 = \frac{e^2}{r}$, $m\omega^2 r^3 = e^2$

$\omega^2 r^4 = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 m^2}$, $\omega^2 r^3 = \frac{e^2}{m}$, $\cancel{r^2 = \frac{e^2}{m}\frac{2\pi m}{hn} = \frac{2\pi e^2}{hn}, r = \left(\frac{2\pi e^2}{hn}\right)^{\frac{1}{2}}}$

$\cancel{\omega = \frac{hn}{2\pi m}\frac{(hn)^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}e} = \left(\frac{hn}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{em}}$, $\cancel{\frac{e^2}{r} = \left(\frac{hn}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{e}{e}}$

$3{,}29\cdot 5$ / 36 $6{,}56$

$\cancel{\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{r_2}\right)\frac{e^2}{r_1}}$ $r = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 e^2 m}$ $\frac{e^2}{2r} = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^2}\frac{1}{n^2}$

$16{,}36$ $21{,}6 : 3{,}29$ $3{,}2940$ 1974 $0{,}21$ $1{,}86$

$m\omega r_n^2 = \frac{hn}{2\pi}$, $mv^2 = mr^2\omega^2 = \frac{e^2}{r}$, $\omega^2 r_n^4 = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 m}$, $\omega^2 r^3 = \frac{e^2}{m}$

$r_n = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 e^2 m}$, $\frac{e^2}{2r_n} = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^2}\frac{1}{n^2}$, $\nu = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$ $n < m$

$\omega_n = \frac{hn}{2\pi m r_n^2}$ $\frac{1}{r_n^2} = \frac{16\pi^4 e^4 m^2}{h^4 n^4}$, $\omega_n = \frac{hn}{h^4 n^4}\frac{16\pi^4 e^4 m^2}{2\pi m} = \frac{8\pi^3 e^4 m}{h^3}\frac{1}{n^3}$

$\nu_n = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3}\frac{2}{n^3}$ $\nu_m = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3}\frac{2}{m^3}$, $\nu_{nm} = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right)$

$\nu_n = N\frac{2}{n^3}$, $\nu_m = N\frac{2}{n^3}$, $\nu_{nm} = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = N\frac{(m+n)(m-n)}{n^2 m^2}$

$t = \frac{3^7 c^4 h^6 \eta}{5^3 4\pi^6 e^{11}}$ $c = 3\cdot 10^{10}$ $h = 6{,}55\cdot 10^{-27}$ $\eta = 1{,}776\cdot 10^7$ $e = 4{,}77\cdot 10^{-10}$

$t = \frac{3^7\cdot 3^4\cdot 6{,}55^6\cdot 1{,}776}{5^3\cdot 4\cdot\pi^6\cdot 4{,}77^{11}}\cdot\frac{10^{40}\cdot 10^{-6\cdot 27}\cdot 10^7}{10^{-110}}$

$27\cdot 6 = 162$
-157
$\cdot 5$
10^{-5}

$\log 3 = 0{,}4771\cdot 11 = 5{,}2481$
$\log 6{,}55 = 0{,}8162\cdot 6 = 4{,}8972$
$\log 1{,}776 = 0{,}2494 = 0{,}2494$
$10{,}3947$

$\log 500 =$ $2{,}6990$
$\log 3{,}1416 = 0{,}4971\cdot 6 = 2{,}9829$
$\log 4{,}77 = 0{,}6789$ $= 7{,}4679$
$6{,}789$ / $7{,}4679$ $13{,}1498$

$13{,}3947 - 3$
$-13{,}1498$
$0{,}2449 - 3$

$\underline{t = 1{,}76\cdot 10^{-8}}$

für $\nu = N\frac{5}{36}$ $\lambda = 656\,\mu\mu$ $(N = 3{,}29\cdot 10^{15})$

$\frac{3}{2} m a^2 \omega = \frac{3h}{4\pi}$, $T = \frac{3h}{4\pi} \frac{e^4 m}{h^3} \frac{8\pi^3 k^2}{} = \frac{e^4 m}{h^2} 6\pi^2 k^2$ $= \frac{3h}{4\pi}\frac{h}{2\pi m}\frac{1}{a^2}$

$V = \frac{e^2}{a}\left(\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{18}-1}}{2} - \frac{6\sqrt{2\sqrt[3]{18}-1}}{\sqrt[3]{12}} + \sqrt{3}\right) = \frac{e^4 m}{h^2} 4\pi^2 k k'$ $= \frac{3h^2}{8\pi^2 m}\frac{1}{a^2}$

$k = \frac{\sqrt{(2\sqrt[3]{18}-1)^3} - 2\sqrt{3}}{6}$, $k' = -\left(\frac{6\sqrt{2\sqrt[3]{18}-1}}{\sqrt[3]{12}} - \frac{\sqrt{2\sqrt[3]{18}-1}}{2} - \sqrt{3}\right)$ $\sqrt{2\sqrt[3]{18}-1} = i$

$0{,}6276 : 2$
$0{,}3138 \cdot 3$
$0{,}9414$

$\sqrt[3]{18} = 2{,}621 \cdot 2 = 5{,}242 - 1 = \sqrt{4{,}242} = 2{,}060 = i$

$k = \frac{i^3}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

$k = \frac{8{,}738}{6} - \frac{1}{1{,}732} = 1{,}457 - 0{,}577 = 0{,}880$ $6\pi^2 k^2 = 40{,}4$

$k' = -\left(\frac{6i}{\sqrt[3]{12}} - \frac{i}{2} - \sqrt{3}\right)$

$k^2 = 0{,}6815$ $6k^2 = 4{,}089$

$\pi^2 = 9{,}870$

$\mathcal{E} = -\frac{e^4 m \pi^2}{h^2}\left(4k \cdot k' - 6k^2\right)$

$-k' = \frac{12{,}360}{2{,}289}$

$0{,}3138$
$+0{,}7782$
$1{,}0920$
$-0{,}3597$
$0{,}7323$

$= 5{,}399$
$-1{,}030$
$4{,}369$
$-1{,}732$
$2{,}637$

$4kk'$
$= 0{,}6021$
$+0{,}3138$
$+0{,}4211$
$1{,}3370$

$-k' = 2{,}637$

$4kk' = 21{,}725$
$-4{,}089$
$17{,}636$

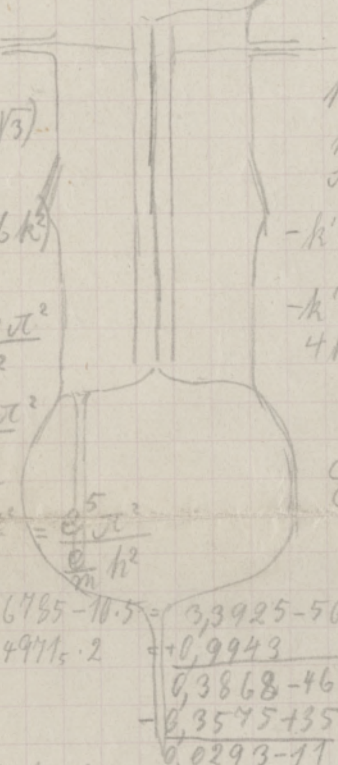
$\mathcal{E}_{H_2^-} = -17{,}636 \frac{e^4 m \pi^2}{h^2}$

$\mathcal{E}_{H_2} = -4{,}401 \frac{e^4 m \pi^2}{h^2}$

$\mathcal{E}_{H_2} = 2\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 \frac{e^4 m \pi^2}{h^2}$

$1{,}732 \cdot 3$ $4{,}196 : 2$
$5{,}196 - 1$ $2{,}098$
$0{,}3218 \cdot 2$
$0{,}6436$

$\mathcal{E}_{H_2} - \mathcal{E}_{H_2^-} = 13{,}235 \frac{e^4 m \pi^2}{h^2} = \frac{e^5 \pi^2}{\frac{e}{m} h^2}$



$e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ $\lg e = 0{,}6785 - 10 \cdot 5 = 3{,}3925 - 50$ $\frac{e}{m} = 5{,}31 \cdot 10^{17}$ $\lg\frac{e}{m} = 0{,}7251 + 17$

$m =$ $\lg \pi = 0{,}4971_5 \cdot 2$ $= +0{,}9943$ $\lg h = 0{,}8162 - 27 \cdot 2 = 1{,}6324 - 54$

$0{,}3868 - 46$ $0{,}3575 - 37$

$-0{,}3575 + 35$

$0{,}0293 - 11$

$\lg 13{,}235 = 0{,}1218 + 1$

$N = 6{,}07 \cdot 10^{23}$ $\lg N = 0{,}7832 + 23$

$0{,}9343 + 13$ $\mathcal{E}_{H_2} - \mathcal{E}_{H_2^-} = 2051500$ cal

$-\lg 4{,}19 \cdot 10^7 = -0{,}6222 - 7$

$0{,}3121 + 6$

$$\nu_{nm} = N\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) = N\frac{(m+n)(m-n)}{m^2 n^2} = N\frac{m+n}{m^2 n^2} = N\frac{2}{n^3} = N\frac{2}{n^2}$$

für $m-n=1$ für $n \gg 1$

$$\nu_n = N\frac{2}{n^3} \quad \nu_m = N\frac{2}{m^3} \quad N = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3}$$

$2:27 = 0{,}074$ $5:36 = 0{,}14$

189 140
110 144
108

$$n=2,\ m=3 \quad \nu_n = N\frac{2}{8} \quad \nu_m = N\frac{2}{27} \quad \nu_{nm} = N\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) = N\frac{5}{36}$$

$$\nu_n = N \cdot 0{,}25 \quad \nu_m = N\,0{,}074 \quad \nu_{nm} = N \cdot 0{,}14$$

$$N = \frac{2\pi^2 e^4 m}{h^3} = 1{,}1 \cdot 10^5\ cm^{-1}$$

$2:64 = 0{,}031$

192
80
16

$$n=4 \quad m=5 \quad \nu_n = \frac{2N}{64} \quad \nu_m = \frac{2N}{125} \quad \nu_{nm} = N\frac{9}{400}$$

$$\nu_n = N\,0{,}031 \quad \nu_m = 0{,}016 \quad \nu_{nm} = 0{,}022_5$$

$N = 3{,}29 \cdot 10^{15}$

$$-\frac{dW}{dt} = \frac{32\pi^4 c}{3\lambda^4}\overline{p^2} = \frac{2}{3}c\,\overline{\ddot{p}^2} \quad W = \frac{m}{e^2}\overline{\left(\frac{dp}{dt}\right)^2} = \frac{c^2 m}{e^2}\overline{\dot{p}^2}$$

$$\cancel{p = e\,p_0 \sin 2\pi\nu t} \quad \overline{\ddot{p}^2} : \overline{\dot{p}^2} = \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2, \quad -\frac{d\ln W}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{cm}\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

$$W = W_0 e^{-\gamma t}, \quad \gamma = \frac{8\pi^2}{3}\frac{e^2}{cm\lambda^2} = \frac{8\pi^2}{3}\frac{e^2}{c^3 m}\nu^2 \quad \lambda = \frac{c}{\nu}$$

$$W = W_0 e^{-\frac{8\pi^2 e^2}{3c^2 m}\nu^2 t}$$

$$r_n = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 e^2 m}$$

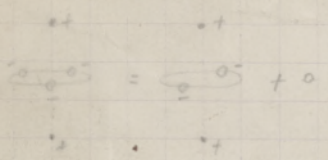
$(n=2)$

$$\frac{32\pi^4 r^4 e^2 \nu^2}{3c^3}t = h\nu, \quad t = \frac{3c^3 h}{32\pi^4 e^2 r^2 \nu^3} \quad r = \frac{h^2}{\pi^2 e^2 m}$$

$$r^2 = \frac{h^4}{\pi^4 e^4 m^2}, \quad \nu = N\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = N\frac{5}{36} = \frac{5\pi^2 e^4 m}{h^3\,18}, \quad \nu^3 = \frac{125\pi^6 e^{12} m^3}{h^9\,8 \cdot 9^3}$$

$$\frac{1}{r^2 \nu^3} = \frac{\pi^4 e^4 m^2 h^9\, 8 \cdot 9^3}{h^4\, 5^3 \pi^6 e^{12} m^3} = \frac{8 \cdot 9^3 h^5}{5^3 \pi^2 e^8 m} \quad t = \frac{3c^3\, 8\, 9^3\, h^6}{5^3 \cdot 32\,\pi^6 e^{10} m}$$

$$t = \frac{3^7 c^4 h^6 \eta}{5^3 \cdot 4\pi^6 e^{11}}$$



Energie des H_2 Moleküls

$$b=\frac{a}{\sqrt3},\quad a^3\omega^2=\frac{(3\sqrt3-1)}{4m}e^2,\quad a^4\omega^2=\frac{h^2}{4\pi^2m^2},\quad a=\frac{h^2\,4\,m}{4\pi^2m^2(3\sqrt3-1)e^2}$$

$$a=\frac{h^2}{(3\sqrt3-1)e^2m\pi^2}=k\frac{h^2}{e^2m}=k\mathcal{C},\quad b=\frac{k}{\sqrt3}\mathcal{C},\quad c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+\frac{1}{3}}\,k\mathcal{C}=\frac{2}{\sqrt3}k\mathcal{C}$$

$$a=\frac{1}{\pi^2(3\sqrt3-1)}\frac{h^2}{e^2m},\quad b=\frac{1}{\pi^2(9-\sqrt3)}\frac{h^2}{e^2m},\quad c=2b=\frac{2}{\pi^2(9-\sqrt3)}\frac{h^2}{e^2m}$$

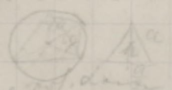
$$\mathcal{E}_p=\frac{e^2}{2b}-\frac{2e^2}{c}-\frac{2e^2}{c}+\frac{e^2}{2a}=e^2\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}-\frac{4}{c}\right]=e^2\left[\frac{1}{2a}-\frac{3\sqrt3}{2a}\right]=\frac{e^2}{a}\frac{1-3\sqrt3}{2}$$

$$\mathcal{E}_k=mv^2=ma^2\omega^2=\frac{(3\sqrt3-1)e^2}{4a}=\frac{e^2}{a}\frac{(3\sqrt3-1)}{4}=-\frac{1}{2}\mathcal{E}_p$$

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}_p+\mathcal{E}_k=-\mathcal{E}_k=\frac{e^2}{a}\frac{1-3\sqrt3}{4}=\frac{(1-3\sqrt3)e^2(3\sqrt3-1)\pi^2e^2m}{4h^2}=-\frac{\left[(3\sqrt3-1)\pi e^2\right]^2m}{(2h)^2}$$

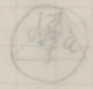
~~Energie des~~ H_2

$$\mathcal{E}_p=\frac{e^2}{2b}-6\frac{e^2}{c}+3\frac{e^2}{d}$$



$$h^2=\frac{3}{4}a^2,\quad h=\frac{a}{2}\sqrt3,\quad 2h=d=a\sqrt3$$

$$\mathfrak{F}_p:\ \frac{e^2}{4b^2}=3\frac{e^2}{c^2}\frac{b}{c},\quad \frac{e^2}{4b^2}=\frac{3e^2b}{c^3},\quad \frac{1}{4b^3}=\frac{3}{c^3},\quad c^3=12b^3,\quad c=b\sqrt[3]{12}$$



$$\mathfrak{F}_p=2\frac{e^2}{c^2}\frac{a}{c}=2\frac{e^2a}{c^3},\quad \mathfrak{F}_e=\frac{e^2}{d^2}\frac{3a}{2d}=\frac{e^2\,3a}{3a^2a\sqrt3}=\frac{e^2}{a^2\sqrt3},\quad \mathfrak{F}_c=m\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{m}{r}v^2=\frac{m}{a}a^2\omega^2=ma\omega^2$$

$$\frac{2e^2a}{c^3}=\frac{e^2}{a^2\sqrt3}+ma\omega^2,\quad a^2+b^2=c^2,\quad c=b\sqrt[3]{12},\quad d=a\sqrt3,\quad c^2=2b^2\sqrt[3]{18},\quad a^2=c^2-b^2$$

$$a^2=b^2\left[2\sqrt[3]{18}-1\right],\quad b=\frac{a}{\sqrt{2\sqrt[3]{18}-1}},\quad c=a\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt{2\sqrt[3]{18}-1}},\quad d=a\sqrt3$$

$$c^3=a^3\frac{12}{\sqrt{(2\sqrt[3]{18}-1)^3}},\quad m\omega^2=\frac{2e^2}{c^3}-\frac{e^2}{a^3\sqrt3}$$

$$\omega^2=\frac{e^2}{m}\left(\frac{2}{c^3}-\frac{1}{a^3\sqrt3}\right)=\frac{e^2}{ma^3}\left(\frac{\sqrt{(2\sqrt[3]{18}-1)^3}-2\sqrt3}{6}\right),\quad a^3\omega^2=\frac{e^2}{m}k=\frac{e^2k}{m}$$

$$m\omega a^2=\frac{h}{2\pi},\quad \omega^2a^4=\frac{h^2}{4\pi^2m^2},\quad a=\frac{h^2m}{4\pi^2m^2e^2k}=\frac{h^2}{e^2m}\frac{1}{4\pi^2k},\quad a^2=\frac{h^4}{e^4m^2}\frac{1}{16\pi^4k^2}$$

$$\omega=\frac{h}{2\pi m}\frac{1}{a^2}=\frac{h}{2\pi m}\frac{e^4m^2\,16\pi^4k^2}{h^4}=\frac{e^4m}{h^3}8\pi^3k^2\qquad T=\frac{3}{2}ma^2\omega^2$$

[illegible] 1)

Rutherford Kern [illegible] gr. Masse u. Radius (Gold $3\cdot10^{-12}$) (H, He $1{,}7\cdot10^{-13}$)

Masse [illegible] $m = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{5}\right)\frac{1}{c^2}\frac{E^2}{r}$

[illegible]

[illegible]

[illegible] (Rivalität) [illegible]

[illegible] Thomson, [illegible] Rutherford [illegible]

[illegible] [illegible] elektr. [illegible]?

[illegible]:

$$\frac{e^2}{r^2} = \frac{e^2}{(2r)^2} - \frac{mv^2}{r},\quad mvr = \frac{h}{2\pi},\quad r = \frac{h^2}{3\pi^2 e^2 m} = 3{,}85\cdot10^{-12}$$

[illegible]

[illegible]

Prout 1815 [illegible] 2 Einwände

1) $M = \frac{E}{c^2}$ $He = 4H - \frac{Q}{c^2}$, $4\cdot1{,}00762 = 4{,}03048$ statt $3{,}994$

Coulomb falsch bei 10^{-13} cm

2) Isotopie [illegible]

Isotopen [illegible] isotop H. [illegible] Isotopie von H

[illegible] 2 [illegible] 1) $O = 16{,}00$ [illegible] 2) H_2 [illegible]

[illegible]

[illegible] Isotopie [illegible]. $H : O$ $1{,}008 : 16{,}000$

[illegible] unmögl. [illegible] Diffusion

Nicht [illegible] [illegible]*), sondern [illegible] [illegible]

[illegible] [illegible] von H_2O Apparat

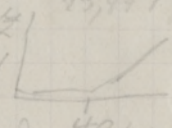
[illegible] bestimmt durch [illegible] von Wasser Apparat

Resultat: [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]: Energiedifferenzen

Rutherford: N [illegible] [illegible], weil $\begin{aligned} 3He &= 11{,}982 \\ +2H &= \underline{2{,}015} \\ &\ 13{,}997 \end{aligned}$ statt $14{,}0101$

[illegible], Mittl. Elektronenzahl $Z = \frac{A}{2} - N$



K. 3 [illegible] Gesetzmäßigkeiten bei radioaktiven Prozessen. Je größer Abweichung von normaler Elektronenzahl umso größer Ausstrahlung, [illegible]: Z größer als normal [illegible] [illegible] [illegible]

$$\frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\varrho} + V = \text{konst}, \quad v^2 = 2\int_{p_2}^{p_1} \frac{dp}{\varrho} = \frac{2}{\varrho}(p_1 - p_2)$$

$NaClO_3$ cf. Gmelin-Kraut 7. Aufl.
II. 1. S. 368 unten bis 369.

Beim Kristallisieren in freier Luft erhält man mehr linke Kristalle als rechte, im geschlossenen Rohr erschienen 433 mal nur linke, 411 mal nur rechte und 94 mal gemischte Kristalle.
Soret, Arch. sc. phys. nat [4] 7, 80.

Aus rechtsdrehenden Kristallen entstehen durch Umkristallisieren rechte und linke in wechselnder Menge. Rechtsdrehende wachsen sowohl in der Lsg linksdrehender als umgekehrt linksdrehende in der Lsg rechtsdrehender weiter.
Marbach, Pogg. 99 451, J. B. 1856, 157

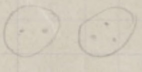
Eine übersättigte Lösung scheidet in Berührung mit einem rechten wie mit einem linken Kristall nur Kristalle derselben Art ab.

<u>Gernez</u> Compt. rend. <u>66</u>, 853

<u>Pope</u> J. Chem. Soc. <u>73</u>, 606, [1898]

Müssen [illegible] d. [illegible] Kern d. Frage nach Struktur d. A.K. [illegible]
z. arbeiten ([illegible])

Rutherford [illegible] Masse [illegible] Atomkern [illegible] (Gold $3 \cdot 10^{-12}$, H, He $1{,}7 \cdot 10^{-13}$)
[illegible] Masse [illegible] Masse [illegible] mit
Atomkern [illegible] radioaktiven [illegible]
Zahl d. Elektr. bestimmt [illegible] pos. Elektr. = H-kern [illegible] He kern [illegible]
$p = m,\ p - e = Z,\ e = m - Z$

Struktur 2 [illegible] in [illegible] ([illegible])
[illegible] Atom  [illegible] d. Elektron +
Elektron, [illegible] H oder He kern, [illegible] 2000× kleiner
[illegible] Elektronen, [illegible]
zu [illegible] Radioaktiv? [illegible] Hypothesen [illegible]
[illegible] (~~[illegible]~~) [illegible] H od. He [illegible]
[illegible] .0. [illegible] H-kern Radius [illegible]
Modell [illegible] (He kern) [illegible] ohne [illegible] Hypothese [illegible]

Prout

Prout 1815 [illegible]
2 [illegible], Isotopen. [illegible]
also Isotope [illegible] Coulomb Gesetz [illegible]
Volum [illegible]

A. Haas, Phys. Zeitschr. 1917
W. Lenz, Bayr. Akad. 1918

$$m = \frac{2}{3c^2}\frac{E^2}{r} \left(\frac{m}{E} = \text{konst also } \frac{E}{r} = \text{konst, muss } \frac{m}{r} = \text{konst}\right)$$

$\frac{2}{3}$ Kleinen (= 1, $\frac{4}{5}$ Raumladung)

$$r = \frac{2}{3{,}9 \cdot 10^{20}} \frac{E}{m} E$$

Elektron: $E = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$, $\frac{E}{m} = 5{,}328 \cdot 10^{17}$, $r_{El} = 1{,}835 \cdot 10^{-13}$ cm

$\frac{M_H}{m} = 1844$, $r_H = \frac{r_{El}}{1844} = 1 \cdot 10^{-16}$ cm

Radius des Kerns $1 \cdot 10^{-16}$ cm 2000 1 mm

" " Elektrons $2 \cdot 10^{-13}$ " 2 m

25000

" " H-Atoms $0{,}5 \cdot 10^{-8}$ " 50 km

$$\frac{mv^2}{r} + \frac{e^2}{4r^2} = \frac{e^2}{r^2}, \quad mvr = \frac{h}{2\pi}, \quad mv^2 r = \frac{3}{4}e^2, \quad v = \frac{3e^2\pi}{2h}$$

$$r = \frac{h}{2\pi m}\frac{1}{v} = \frac{h^2}{3\pi^2 e^2 m} = 3{,}85 \cdot 10^{-13}$$

H = 1,00762 He = 3,994

Sehr verehrter Herr Dr Stern!

Die Diffusion von Gasen in Gallerten wurde beschrieben von

G. Hüfner Z. physikal. Chemie 27. 1898. 227.

A. Hagenbach Wied. Ann. 65. 1898. 673.

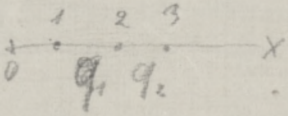
E. Hatschek & L. Simon Kolloid-Ztschr. 10. 1912. 265

Mit den besten Grüßen

Liesegang

Schloss Str 21 II

9 Juli 1919



$$m_1 \frac{d^2\xi_1}{dt^2} = -a^2(\xi_1-\xi_2) - b^2(\xi_1-\xi_3) = -(a^2+b^2)\xi_1 + a^2\xi_2 + b^2\xi_3$$

$$m_2 \frac{d^2\xi_2}{dt^2} = -a^2(\xi_2-\xi_1) - a^2(\xi_2-\xi_3) = \,?$$

$d r_{12} = q_1 = \xi_2 - \xi_1$

$$m_3 \frac{d^2\xi_3}{dt^2} = -a^2(\xi_3-\xi_2) - b^2(\xi_3-\xi_1)$$

$d r_{23} = q_2 = \xi_3 - \xi_2$

$r_{13} = r_{12} + r_{23}$

$d r_{13} = q_1 + q_2$

$$V = a_{11} q_1^2 + 2a_{12} q_1 q_2 + a_{22} q_2^2$$

$$T = m_1 \dot\xi_1^2 + m_2 \dot\xi_2^2 + m_3 \dot\xi_3^2,$$

$$m_1 \dot\xi_1 + m_2 \dot\xi_2 + m_3 \dot\xi_3 = 0, \quad \dot q_1 = \dot\xi_2 - \dot\xi_1, \quad \dot q_2 = \dot\xi_3 - \dot\xi_2$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{m_1} \\ \frac{1}{m_2} \\ \frac{1}{m_3} \end{array} \begin{vmatrix} x-(a^2+b^2) & a^2 & b^2 \\ a^2 & x-2a^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & x-(a^2+b^2) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x-\alpha_1 & \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & x-2\alpha_2 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 & x-\alpha_3 \end{vmatrix}$$

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3) \cancel{+} - (x-\alpha_1)\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2(x-\alpha_3) = 0$$

$$x^3 - x^2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) +$$

N 14,0101

$He = \underline{3,994 \cdot 3} =$

11,982

$H_2 = \underline{2,015_{24}}$

$13,997_{24}$

$$V = a_{11} q_1^2 + 2a_{12} q_1 q_2 + a_{22} q_2^2, \quad T = b_{11} \dot{q}_1^2 + b_{22} \dot{q}_2^2$$

$$b_{11} \ddot{q}_1 = -a_{11} q_1 - a_{12} q_2, \quad \ddot{q}_1 + c_{11} q_1 + c_{12} q_2 = 0, \quad q_1 = A_1 e^{i\lambda t}$$

$$b_{22} \ddot{q}_2 = -a_{21} q_1 - a_{22} q_2, \quad \ddot{q}_2 + c_{21} q_1 + c_{22} q_2 = 0, \quad q_2 = A_2 e^{i\lambda t}$$

$$\begin{matrix} A_1(c_{11} - \lambda^2) + A_2 c_{12} = 0 \\ A_1 c_{21} + A_2(c_{22} - \lambda^2) = 0 \end{matrix} \quad \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda^2 & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} - \lambda^2 \end{vmatrix} \quad (c_{11} - \lambda^2)(c_{22} - \lambda^2) - c_{12}^2 = 0$$

$$\lambda^2 = x, \quad c_{11} c_{22} - \lambda^2 (c_{11} + c_{22}) + \lambda^4 - c_{12}^2 = 0, \quad \lambda^4 - 2\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \lambda^2 + \frac{(c_{11} + c_{22})^2}{4}$$

$$= c_{12}^2 - c_{11} c_{22} + \frac{(c_{11} + c_{22})^2}{4} = c_{12}^2 + \left(\frac{c_{11} - c_{22}}{2}\right)^2, \quad \lambda^2 = \frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} - c_{22}}{2}\right)^2 + c_{12}^2}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \quad q_1 = k_1 A_{11}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{8\pi^2 e^2}{3cm\lambda^2} t}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{8\pi^2 e^2}{3cm\lambda^2}\varepsilon \qquad \Delta\varepsilon = -\frac{8\pi^2 e^2}{3cm\lambda^2}\varepsilon\Delta\tau$$

$$\cancel{c = \lambda\nu \quad \Delta\varepsilon = -\frac{8\pi^2 e^2 c}{3m\nu^2}\varepsilon\Delta\tau}$$

$$(2\pi\nu r)^2\frac{1}{2}m = \varepsilon = 2\pi^2\nu^2 r^2 m$$

$$\cancel{\Delta\varepsilon = \frac{16\pi^4 e^2 c\, r^2\Delta\tau}{3}}$$

$$c = \lambda\nu,\ \lambda = \frac{c}{\nu},\ \lambda^2 = \frac{c^2}{\nu^2} \qquad \Delta\varepsilon = -\frac{8\pi^2 e^2 \nu^2}{3c^3 m}\varepsilon\Delta\tau$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{16\pi^4 e^2 \nu^4 r^2}{3c^3}\Delta\tau,\ 2\pi\nu = \omega,\ \Delta\varepsilon = \frac{1}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega^4 r^2\tau$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega^4 r^2\tau,\ E = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega^4 r^2$$

$$E = \frac{1}{\tau}h\nu = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\omega^4 r^2,\ \tau = \frac{3c^3 h\nu}{2e^2\omega^4 r^2}$$

mv^2

D. 29. 3. 9. Über Ihre freundliche Karte
habe ich mich vielmals gefreut. Hoffentlich
geht es Ihnen und Ihrer Familie noch
[illegible]. Was macht Herr Doktor, und dessen
~~die beiden Damen~~ Adresse ich bitte ebenso wie
~~und die~~ Frau Dr. Brentano u. Dresden, mit denen ich in
Zürich zusammen war. Auch möchte ich gern
wissen, was ~~Ihr~~ Schroeder jetzt macht, von dem
man gar nichts mehr hört.

Mia

Voraussetzungen: Dampf ideales Gas, Gasvolumen groß gegen Flüssigkeitsvol.

$c_g = c_p - \frac{\lambda}{T}$ Beweis: Wärmemenge, die nötig ist, um den Dampf bei Erhaltung der Sättigung um dT zu erwärmen, ist:

$$c_g\, dT = c_p\, dT - v\, dp;\quad c_g = c_p - v\frac{dp}{dT},\quad \lambda = T v \frac{dp}{dT},\quad c_g = c_p - \frac{\lambda}{T}$$

Das Atom

Atom wörtlich unteilbar, so zu verstehen, daß derartige große Kräfte auftreten mit den üblichen Mitteln nicht unterteilbar. Aber nicht unteilbar sondern sehr kompliziert zusammengesetzt aus (neg. Elektronen) u. pos. Elementarladungen. Diese sind bei dem heutigen Stande der Wissenschaft – das Letzte Unteilbare. Ladung eines Elektrons $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ el. st. C.G.S. Einheit. Masse g. Wie die pos. Ladung aussehen, das ist das heutige Problem. Coulombsches Gesetz. Kugeln pos. [illegible] Kugeln [illegible] Masse. Erste Frage: Wieviel Elektronen enthält ein Atom. Antwort [illegible].

$$\frac{\Delta\nu}{K} = f\left(\frac{Z-l}{b}\right) \quad \begin{aligned} &\underline{\text{L-Serie}} \\ &l = 4{,}58 \pm 0{,}02 \\ &b = 2{,}080 \pm 0{,}005 \end{aligned}$$

$$\nu_{K_\alpha} = K - L$$

$$\frac{Z-k}{a} \quad \begin{aligned} &\underline{\text{K-Serie}} \\ &a = 1{,}0000 \pm 0{,}0006 \\ &k = 1{,}64 \pm 0{,}007 \end{aligned}$$

M, N, O sind nicht wasserstoffähnlich

$$\mathfrak{K} = \frac{Ze^2}{a^2} - \sum_{1}^{p-1} \frac{e^2}{r_n^2}\cos\vartheta_n$$

$$\frac{r_n}{2} = a\cos\vartheta_n \qquad r_n = 2a\sin\varphi_n$$

$$\vartheta_n = \frac{\pi}{2} - \varphi_n \qquad = 2a\sin\frac{n\pi}{p}$$

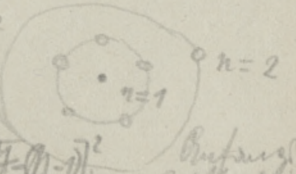
$$\frac{2\varphi_n}{2\pi} = \frac{n}{p}$$

$$\mathfrak{K} = \frac{e^2}{a^2}\left(Z - S_p\right), \quad S_p = \sum_{n=1}^{n=p-1} \frac{1}{\sin\frac{n\pi}{p}}$$

$p: \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots$

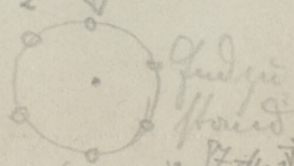
$S_p = \quad 0 \quad 0{,}25 \quad 0{,}57735 \quad \ldots$

$$\frac{W^*}{hk} = p\,\frac{(Z-S_p)^2}{n^2}$$



$$\frac{W_1}{hk} = (p-1)\frac{(Z-S_{p-1})^2}{1^2} + \frac{[Z-(p-1)]^2}{2}$$

$$\frac{W_2}{hk} = p\,\frac{(Z-S_p)^2}{1^2}$$



$W_2 - W_1$

$$\frac{\nu}{K} = p(Z-S_p)^2 - (p-1)(Z-S_{p-1})^2 - \frac{[Z-(p-1)]^2}{4}$$

$$= A_p Z^2 + B_p Z + C_p \quad \text{Debye}$$

$$\frac{\nu}{K} = \frac{(Z-1{,}64)^2}{1^2} - \frac{(Z-3{,}5)^2}{2^2} \quad \text{Sommerfeld}$$

$A_p = \frac{3}{4}$ in beiden Formeln

$$\left.\begin{aligned} B_p &= -2pS_p + 2(p-1)S_{p-1} + \tfrac{1}{2}(p-1) \\ C_p &= pS_p^2 - (p-1)S_{p-1}^2 - \tfrac{1}{4}(p-1)^2 \end{aligned}\right\} \text{Debye}$$

$$\nu_0 = \frac{h N^{\frac{5}{3}}}{4\pi M v^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{h N^{\frac{5}{3}}}{4\pi}}{M v^{\frac{2}{3}}}$$

$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$ $N = 6{,}07 \cdot 10^{23}$

$N^{\frac{2}{3}} = 607^{\frac{2}{3}} 10^{14} = 71{,}5 \cdot 10^{14}$

$2{,}783 \cdot \frac{2}{3} = 1{,}854$ $N^{\frac{8}{3}} = N^2 \cdot N^{\frac{2}{3}}$

$$h\nu_0 = \frac{h^2 N^{\frac{5}{3}}}{4\pi} \frac{1}{M v^{\frac{2}{3}}}$$ $N^{\frac{1}{3}} = 0{,}928 = 8{,}47 \cdot 10^{7}$

$$h\nu_0 = \frac{M}{N} u^2, \quad u^2 = \frac{N h \nu_0}{M}$$

$$u^2 = \frac{h^2 N^{\frac{8}{3}}}{4\pi} \frac{1}{M^2 v^{\frac{2}{3}}}$$

$$u = \frac{h N^{\frac{4}{3}}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{M v^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{6{,}55 \cdot 10^{-27} \cdot 51{,}5 \cdot 10^{28}}{2 \cdot 1{,}772} = 9{,}5 \cdot 10^{2} \frac{1}{M v^{\frac{1}{3}}} \text{cm}$$

$v_0 = 27\,l = 3^3 \cdot 10^3$, $v_0^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 10$

$$v = \frac{v_0}{\rho} \quad u = 32 \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{M} \text{cm}$$

$$\rho = \frac{1}{10^3} \quad \rho^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{10} \quad u = \frac{3{,}2}{M} \text{cm}$$

für $M = 250$ $u = 1{,}3 \cdot 10^{-2}$ cm $= 0{,}13$ mm

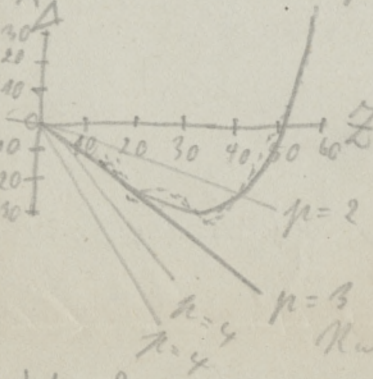
$$u = \frac{1}{3} \frac{\rho^{\frac{1}{3}}}{M} \left(\frac{300}{T}\right)^{\frac{1}{3}} \text{m}$$

$\rho = 1$, $M = 2$, $T = 20$

$$u = \frac{1}{3} \frac{1}{2} 2{,}5 \text{ m} = 0{,}42 \text{ m}$$

Mantel
Korrekturen
~~Brief an Laura~~
Bücher zurückgeben
(Karte an Albert)
~~Rs für Gerl~~

$$\frac{V}{K} - \frac{3}{4}Z^2 = \Delta = B_p Z + C_p$$



$p = 3$

Relativität:

$$\frac{W}{hk} = \frac{2p}{n^2\alpha^2}\left(1 - \sqrt{1 - \alpha^2\left(\frac{n}{Z} - \sigma_p\right)^2}\right)$$

$$S_t = R \ln V + \frac{3}{2} R \ln T + R + \frac{3}{2} R + \cancel{\tfrac{3}{2}} R \ln \frac{(2\pi m k)^{\frac{3}{2}}}{N h^3}$$

$$S_t = R \ln \frac{V}{N!} + \frac{3}{2} R \ln \frac{2\pi m k T}{h^2} + \frac{3}{2} R \quad (\ln N! = N \ln N - N)$$

$$S_r^{2at} = R \ln 4\pi + R \ln \frac{2\pi J k T}{h^2} + R$$

$$S_r^{mehrat.} = R \ln 8\pi^2 + \frac{3}{2} R \ln \frac{2\pi J_1 J_2 J_3 k T}{h^3} + \frac{3}{2} R$$

$$S_r^{2at\ i.\,Ebene} = R \ln 2\pi + \frac{R}{2} \ln \frac{2\pi J k T}{h^2} + \frac{R}{2}$$

$$S_t^{i.\,Ebene} = R \ln \frac{V}{N!} + R \ln \frac{2\pi m k T}{h^2} + R \qquad s_t = k - k \ln \frac{h\nu}{kT}$$

$$S_r^0 = \cancel{R \ln T} + 2R + R \ln \frac{p k}{h^2}, \quad p = 2{,}90 \cdot 10^{-40} \qquad S_r^0 = R + R \ln \frac{8\pi^2 J k}{h^2}$$

$$\cancel{R} + \cancel{R \ln} \frac{8\pi^2 J \cancel{k}}{\cancel{h^2}} = \cancel{2R} * \cancel{R \ln} \frac{p * e}{\cancel{h^2}}, \quad 8\pi^2 J = p e, \quad J = p \frac{e}{8\pi^2}$$

$$J = \frac{2{,}90 \cdot 10^{-40} \cdot 2{,}718}{8\pi^2} = 1 \cdot 10^{-41}$$

Sonnabend d. 7. Juni 13

Nach reaktivieren (mit Bürsten.) in N_2 einlassen $\frac{\cancel{1}70}{200}$ } 6. Juni

nachts " " " $\frac{\cancel{1}70}{200}$

Über Nacht stehen gelassen

$\frac{\cancel{1}75}{200}$ NB Wird bei gewendetem Korb nach unten hin und hergeschoben und ca ½ Minute dem Draht unten gegenüber gelassen, so erhöht sich das Potential Zn-Draht und verringert sich Cu-Draht. Dies kann nicht vom Drehen herrühren, da das Cu dabei gewiss mit Bürste in Berührung kommt u. die Öffnung besonders stark zieht (nach 3 Mal in 2 Min.)

Nach Drehen $\frac{\cancel{1}94}{194} \cdot 2$, nach ½ St $\frac{\cancel{1}80}{180}$ $\frac{85}{185} \cdot 2$, nach 2 do $\frac{100}{200} \cdot 2$,

Nach 2 Tg. $\frac{88}{188} \cdot 2$, KNa entfernt, N_2 ohne KNa eingelassen

Donnerstag, d. 12 Juni 1913

Nach 5 Tagen $\frac{55}{155} \cdot 2{,}065$ (Akkum. v. Z. Voltmeter zu 2,065 best.)

$$f_2 - f_1 = p(v_1 - v_2), \quad \frac{df_2}{dT} - \frac{df_1}{dT} = (v_1 - v_2)\frac{dp}{dT} + p\left(\frac{dv_1}{dT} - \frac{dv_2}{dT}\right)$$

$$\frac{df}{dT} = \frac{du}{dT} - T\frac{ds}{dT} - s$$

$$\cancel{s_1 - s_2 = \frac{\lambda}{T}} \qquad df = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T dv$$

$$\frac{df}{dT} = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T \frac{dv}{dT}$$

$$\cancel{df = \frac{du + p\,dv}{T}} \qquad T\,ds = du + p\,dv$$

$$df = du - T\,ds - s\,dT = -p\,dv - s\,dT$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = -s, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = -p$$

$$\frac{df}{dT} = -p - s\frac{dv}{dT}$$

$$\cancel{-p}\; s_1 + p\frac{dv_1}{dT} - s_2 - p\frac{dv_2}{dT} = (v_1 - v_2)\frac{dp}{dT} + p\left(\frac{dv_1}{dT} - \frac{dv_2}{dT}\right)$$

$$s_1 - s_2 = (v_1 - v_2)\frac{dp}{dT} = \frac{u_1 - u_2 + p(v_1 - v_2)}{T} = \frac{\lambda}{T}$$

$$\lambda = T(v_1 - v_2)\frac{dp}{dT}, \quad \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_1 - v_2)}$$

$$v_1 - v_2 = \frac{RT}{p}, \quad \lambda = \frac{RT^2}{p}\frac{dp}{dT} = RT^2\frac{d\ln p}{dT}$$

$$\frac{d\ln p}{dT} = \frac{\lambda}{RT^2}$$

$$ds = \frac{du + p\,dv}{T} = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right] dv$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v , \quad \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T + p\right]$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v - T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v - s = -s$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T - T\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = -p$$

$$S_g = R \ln v + c_v \ln T + S_0$$

$$S_f = \int_0 \frac{c_f}{T} dT$$

$$S_g - S_f = \frac{\lambda}{T} = -R \ln p + c_p \ln T + S_0' - \int_0^T \frac{c_f}{T} dT$$

$$\ln p = -\frac{\lambda}{RT} + \frac{c_p}{R} \ln T - \int_0^T \frac{c_f}{T} dT + S_0'$$

$$\frac{d \ln p}{dT} = \frac{\lambda}{RT^2} + \frac{c_p - c_f}{RT} - \frac{\frac{d\lambda}{dT}}{RT} = \frac{\lambda}{RT^2}$$

$$-\frac{(u_1-u_2)\,\delta M_1}{T} + (s_1-s_2)\,\delta M_1 + \frac{p_1 M_1\,\delta v_1 - p_2 M_1\,\delta v_1}{T}$$

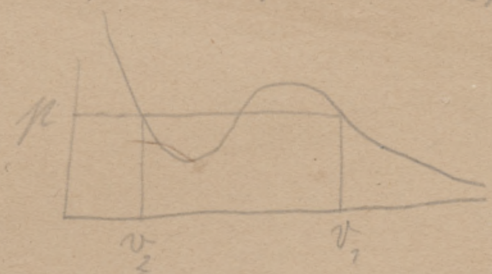
$$-\frac{p_2(v_1-v_2)\,\delta M_1}{T} = 0$$

$$\left[s_1-s_2-\frac{u_1-u_2+p_2(v_1-v_2)}{T}\right]\delta M_1 + \frac{p_1-p_2}{T}M_1\,\delta v_1 = 0$$

$$p_1-p_2=0,\quad p_1=p_2,\quad s_1-s_2=\frac{u_1-u_2+p(v_1-v_2)}{T}$$

$$f=u-Ts,\quad f_1-f_2=p(v_1-v_2)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_v = \frac{\partial u}{\partial T}$$



$$p(v_1-v_2)=\int_{v_2}^{v_1} p\,dv$$

$$=\int_{v_2}^{v_1}\left(\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}\right)dv = RT\ln\frac{v_1-b}{v_2-b}+a\left(\frac{1}{v_1}-\frac{1}{v_2}\right)=p(v_1-v_2)$$

$$p=\frac{RT}{v_1-b}-\frac{a}{v_1^2}=\frac{RT}{v_2-b}-\frac{a}{v_2^2}$$

$$pv_1=RT\ln\frac{v_1}{v_2-b}-\frac{a}{v_2},\quad p=\frac{RT}{v_1}=\frac{RT}{v_2-b}-\frac{a}{v_2^2}$$

$$RT=RT\ln$$

[illegible]

2 Phasen $\delta S = 0 \quad p_1\, v_1\, T_1\,,\; p_2\, v_2\, T_2 \qquad dS = \dfrac{dU + p\,dV}{T}$

$M_1 + M_2 = \text{konst}\,,\; M_1 v_1 + M_2 v_2 = \text{konst}\,,\; M_1 u_1 + M_2 u_2 = \text{konst}$

$\cancel{dS_1 = \dfrac{dU_1 + p_1\,dV_1}{T_1}}\,,\; \cancel{dS_2 = \dfrac{dU_2 + p_2\,dV_2}{T_2}}$

$dU_1 = d(M_1 u_1) = M_1\,du_1 + u_1\,dM_1\,,\; dU_2 = M_2\,du_2 + u_2\,dM_2$

$dV_1 = d(M_1 v_1) = M_1\,dv_1 + v_1\,dM_1\,,\; dV_2 = M_2\,dv_2 + v_2\,dM_2$

$dM_1 + dM_2 = 0\,,\; M_1\,dv_1 + v_1\,dM_1 + M_2\,dv_2 + v_2\,dM_2 = 0$

$M_1\,du_1 + u_1\,dM_1 + M_2\,du_2 + u_2\,dM_2 = 0$

$dS_1 = M_1\,ds_1 + s_1\,dM_1\,,\; dS_2 = M_2\,ds_2 + s_2\,dM_2$

$\cancel{dS = dS_1} \quad dS = \dfrac{dQ}{T} = \dfrac{dU + p\,dV}{T}$

$M_1\, p_1\, v_1\, s_1\, u_1 \quad M_2\, p_2\, v_2\, s_2\, u_2 \quad T_1 = T_2 = T$

$S = M_1 s_1 + M_2 s_2 \quad \delta S = M_1\,\delta s_1 + s_1\,\delta M_1 + M_2\,\delta s_2 + s_2\,\delta M_2 = 0$

$M_1 + M_2 = M\,,\; \delta M_1 + \delta M_2 = 0$

$M_1 v_1 + M_2 v_2 = V\,,\; M_1\,\delta v_1 + v_1\,\delta M_1 + M_2\,\delta v_2 + v_2\,\delta M_2 = 0$

$M_1 u_1 + M_2 u_2 = U\,,\; M_1\,\delta u_1 + u_1\,\delta M_1 + M_2\,\delta u_2 + u_2\,\delta M_2 = 0$

$\delta s_1 = \dfrac{\delta Q}{T} = \dfrac{\delta u_1 + p_1\,\delta v_1}{T}\,,\; \delta s_2 = \dfrac{\delta u_2 + p_2\,\delta v_2}{T}$

$M_1 \dfrac{\delta u_1 + p_1\,\delta v_1}{T} + M_2 \dfrac{\delta u_2 + p_2\,\delta v_2}{T} + (s_1 - s_2)\,\delta M_1 = 0$

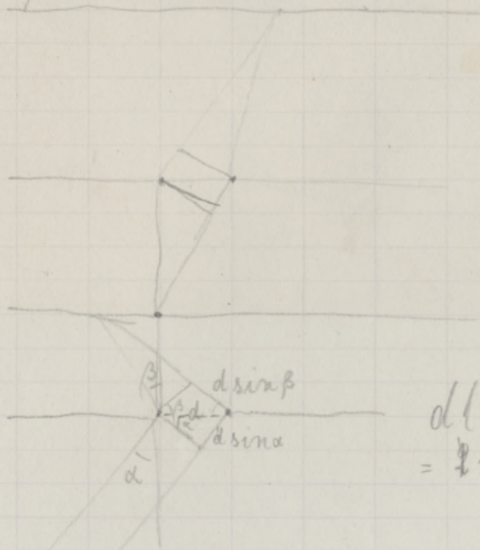
$\dfrac{M_1\,\delta u_1 + M_2\,\delta u_2}{T} + \dfrac{p_1\,\delta v_1 M_1 + p_2\,\delta v_2 M_2}{T} + (s_1 - s_2)\,\delta M_1 = 0$

$M_1\,\delta u_1 + M_2\,\delta u_2 = -(u_1 - u_2)\,\delta M_1\,,$

$M_1\,\delta v_1 + M_2\,\delta v_2 = -(v_1 - v_2)\,\delta M_1\,,\; \cancel{M}$

$M_2\,\delta v_2 = -(v_1 - v_2)\,\delta M_1 - M_1\,\delta v_1$

Erfahrungsgemäss gilt das Curie-Langevin'sche Gesetz, wonach die Magnetisierbarkeit umgekehrt prop. d. abs. Temp. ist, nicht nur für Gase sondern auch für feste Körper. Um dies zu erklären, hat P. Weiss angenommen, dass die Molekeln auch in festen Körpern frei drehbar sind. Die Tatsachen der Kristallstruktur zeigen, dass diese Annahme falsch ist. ~~In der obigen Arbeit wird gezeig~~ Deshalb hat P. Weiss in einer späteren Arbeit ~~gezeigt~~ versucht, ~~dass~~ das Curie'sche Gesetz unter der Voraussetzung abzuleiten, dass die Molekeln im Kristall an ~~um~~ bestimmte krystallogr. Gleichgewichtslagen gebunden sind ~~Richtungen drehbar~~. In der obigen Arbeit wird gezeigt, dass die Weiss'sche Ableitung fehlerhaft ist.



$$d(\sin\alpha+\sin\beta) = n\lambda$$

$$dn_l = \pi \sigma^2 N_{Hg}\, dl \cdot n_l$$

$$d \ln n_l = \pi \sigma^2 N_{Hg}\, dl$$

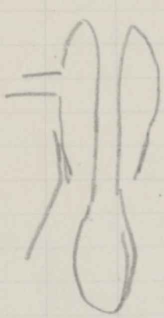
$$n_l = n_0 e^{-N_{Hg} \pi \sigma^2 l} = n_0 e^{-\frac{l}{\lambda}}$$

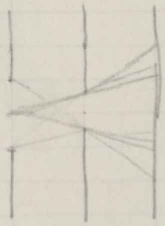
$$N_{Hg} = N_0 \frac{1}{20000 \cdot 10^6} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{10}} = 3 \cdot 10^{13}$$

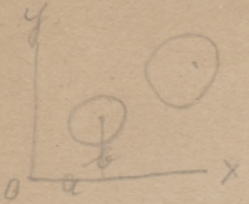
$\sigma = 8 \cdot 10^{-9}$ $\sigma^2 = 64 \cdot 10^{-18}$ $N_{Hg} \pi \sigma^2 = 3 \cdot 10^{13} \cdot 3 \cdot 64 \cdot 10^{-18}$

$\frac{1}{\lambda} = 6 \cdot 10^{-3}$ $\sigma = 32$ $\frac{1}{\lambda} = 10^{-1}$ $\lambda = 10$ cm

$e = 2{,}72$ $e^2 = 7{,}4$ $e^3 = 20$







$$x = x(a,b,t) \qquad x = x(a,b) \qquad x = \lambda_0 + \lambda_1 a + \lambda_2 b$$
$$y = y(a,b,t) \qquad y = y(a,b \qquad y = \mu_0 + \mu_1 a + \mu_2 b$$

$$(x-\lambda_0) = \lambda_1 a + \lambda_2 b \,\big|\, \mu_2 \qquad (x-\lambda_0)\mu_2 - (y-\mu_0)\lambda_2 = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)a$$
$$(y-\mu_0) = \mu_1 a + \mu_2 b \,\big|\, \lambda_2$$

$$a = (x-\lambda_0)\lambda_1' + (y-\mu_0)\mu_1' \qquad \frac{\mu_2}{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1} = \lambda_1', \quad \frac{-\lambda_2}{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1} = \mu_1'$$
$$b = (x-\lambda_0)\lambda_2' + (y-\mu_0)\mu_2'$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1$$

$$\overline{m} = m_0 \frac{\cos\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}\right)+h\cos^2\beta\left(1-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}\right)+h\sin^2\beta\left(\frac{3}{3p^2}-\frac{30}{20p^4}\right)}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4} \qquad\qquad +h\cos\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}\right)}$$

$$\overline{m} = m_0\left\{\cos\beta\,\frac{1-\frac{4}{3p^2}+\frac{4}{5p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}} + h\cos^2\beta\,\frac{1-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}} + h\sin^2\beta\,\frac{\frac{3}{3p^2}-\frac{30}{20p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}} - h\cos^2\beta\left(\frac{1-\frac{4}{3p^2}+\frac{4}{5p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}}\right)^2\right.$$

$$\overline{m} = m_0\left\{\cos\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}\right)\left(1+\frac{1}{3p^2}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}\right) = \cos\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{1}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}-\frac{4}{9p^4}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}\right)\right.$$

$$+h\cos^2\beta\left(1-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}\right)\left(1+\frac{1}{3p^2}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}\right) = h\cos^2\beta\left(1-\frac{7}{3p^2}+\frac{1}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}-\frac{7}{9p^4}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}\right)$$

$$+h\sin^2\beta\left(\frac{3}{3p^2}-\frac{30}{20p^4}\right)\left(1+\frac{1}{3p^2}\right) = h\sin^2\beta\left(\frac{1}{p^2}-\frac{3}{2p^4}+\frac{1}{3p^4}\right)$$

$$-h\cos^2\beta\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{5}{12p^4}\right)^2 = -h\cos^2\beta\left(1-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\frac{5}{6p^4}\right)\Big\}$$

$$\overline{m} = m_0\left\{\cos\beta\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{5}{12p^4}\right)+h\left[\cos^2\beta\left(1-\frac{2}{p^2}+\frac{7}{3p^4}\right)-\cos^2\beta\left(1-\frac{2}{p^2}+\frac{11}{6p^4}\right)+\sin^2\beta\left(\frac{1}{p^2}-\frac{7}{6p^4}\right)\right]\right\}$$

$$\overline{m} = m_0\left[\cos\beta\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{5}{12p^4}\right)+h\sin^2\beta\frac{1}{p^2}+h\cos^2\beta\frac{1}{2p^4}-h\sin^2\beta\frac{7}{6p^4}\right]$$

$$M = \int\overline{m}\,dn, \quad dn = \frac{n\sin\beta\,d\beta}{2}, \quad M = \frac{n}{2}\int_0^\pi \overline{m}\sin\beta\,d\beta$$

$$M = \frac{n m_0}{2}\left[\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{5}{12p^4}\right)\int_0^\pi\cos\beta\sin\beta\,d\beta + h\left(\frac{1}{p^2}-\frac{7}{6p^4}\right)\int_0^\pi\sin^3\beta\,d\beta - h\frac{1}{2p^4}\int_0^\pi\cos^2\beta\sin\beta\,d\beta\right]$$

$$M = \frac{n m_0}{2}h\left[\left(\frac{1}{p^2}-\frac{7}{6p^4}\right)\frac{8}{3}-\frac{1}{2p^4}\frac{2}{3}\right], \quad \int_0^\pi\sin^3\beta\,d\beta = -\int_0^\pi(1-\cos^2\beta)\,d\cos\beta = -\left[\cos\beta-\frac{\cos^3\beta}{3}\right]_0^\pi = \frac{8}{3}$$

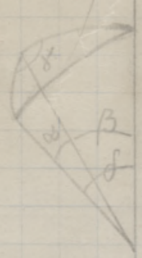
$$\int_0^\pi\cos^2\beta\sin\beta\,d\beta = -\int_0^\pi\cos^2\beta\,d\cos\beta = -\frac{\cos^3\beta}{3}\Big|_0^\pi = +\frac{2}{3}$$

$$M = \frac{n m_0}{3}h\left(\frac{4}{p^2}-\frac{14}{3p^4}-\frac{1}{2p^4}\right)$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{2kT}{a^2}, \quad h = \frac{m_0\mathcal{G}}{kT}, \quad \frac{h}{p^2} = \frac{2m_0\mathcal{G}}{a^2}$$

$$M = \frac{n m_0 h}{3}\left(\frac{4}{p^2}-\frac{31}{6p^4}\right) = \frac{n m_0}{3}\frac{h}{p^2}\left(4-\frac{31}{6p^2}\right) = \frac{2n m_0^2\mathcal{G}}{3a^2}\left(4-\frac{31}{3}\frac{kT}{a^2}\right)$$

$$M = \frac{8n m_0^2}{3a^2}\left(1-\frac{31}{24}\frac{kT}{a^2}\right)\mathcal{G}$$



$$m = m_0 \cos\delta, \quad \psi = \frac{a^2\alpha^2}{2} + m_0 g\,[1-\cos\delta]$$

$$\bar m = \int m\, d\omega, \quad d\omega = C e^{-\frac{\psi}{kT}} \frac{\sin\alpha\, d\alpha\, d\gamma}{4\pi}, \quad \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} d\omega = 1$$

$$p^2 = \frac{a^2}{2kT} \gg 1, \quad h = \frac{m_0 g}{kT} \ll 1, \quad e^{\frac{m_0 g}{kT}\cos\delta} = 1 + \frac{m_0 g}{kT}\cos\delta$$

$$\bar m = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-p^2\alpha^2} e^{-h(1-\cos\delta)}\, m_0 \cos\delta \sin\alpha\, d\alpha\, d\gamma}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-p^2\alpha^2} e^{-h(1-\cos\delta)} \sin\alpha\, d\alpha\, d\gamma}$$

$$\bar m = m_0 \frac{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos\delta \sin\alpha\, d\alpha\, d\gamma + h \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos^2\delta \sin\alpha\, d\alpha\, d\gamma}{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-p^2\alpha^2} \sin\alpha\, d\alpha\, d\gamma + h \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos\delta \sin\alpha\, d\alpha\, d\gamma}$$

$$\cos\delta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, \quad \cos^2\delta = \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\gamma$$
$$+ 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\cos\gamma$$

$$\bar m = m_0 \frac{\cos\beta\, 2\pi \int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha + h\, 2\pi \cos^2\beta \int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos^2\alpha \sin\alpha\, d\alpha + \boxed{h\pi\sin^2\beta \int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2}\sin^3\alpha\, d\alpha}}{2\pi \int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\, d\alpha + h\, 2\pi\cos\beta \int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2p}, \quad \sin\frac{x}{p} = \frac{x}{1!p} - \frac{x^3}{3!p^3} + \frac{x^5}{5!p^5}, \quad \cos\frac{x}{p} = 1 - \frac{x^2}{2!p^2} + \frac{x^4}{4!p^4}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin\frac{x}{p}\, dx = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{1!p}\int_0^{\infty} e^{-x^2} x\, dx - \frac{1}{3!p^3}\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^3 dx + \frac{1}{5!p^5}\int_0^{\infty} e^{-x^2}x^5 dx\right)$$

$$= \frac{1}{2p}\left(\frac{1!}{1!p} - \frac{2!}{3!p^3} + \frac{3!}{5!p^5}\right) = \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{6p^4} + \frac{1}{40p^6} \qquad \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n-1} dx = \frac{n!}{2}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin\frac{x}{p}\cos\frac{x}{p}\, dx = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\left(\frac{x}{1!p} - \frac{x^3}{3!p^3} - \frac{x^3}{1!2!p^3} + \frac{x^5}{5!p^5} + \frac{x^5}{2!3!p^5} + \frac{x^5}{1!4!p^5}\right) dx$$

$$\frac{1}{2p}\left(\frac{1!}{1!p} - \frac{2!}{3!p^3} - \frac{2!}{1!2!p^3} + \frac{3!}{5!p^5} + \frac{3!}{2!3!p^5} + \frac{3!}{1!4!p^5}\right) = \frac{1}{2p^2} - \frac{4}{6p^4} + \frac{4}{10p^6}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2}\cos^2\alpha\sin\alpha\, d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\cos^2\frac{x}{p}\sin\frac{x}{p}\, dx = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\left(1 - \frac{2x^2}{2!p^2} + \frac{x^4}{2!^2p^4} + \frac{2x^4}{4!p^4}\right)\left(\frac{x}{1!p} - \frac{x^3}{3!p^3} + \frac{x^5}{5!p^5}\right) dx$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\left(\frac{x}{1!p} - \frac{2x^3}{1!2!p^3} - \frac{x^3}{3!p^3} + \frac{x^5}{5!p^5} + \frac{2x^5}{2!3!p^5} + \frac{x^5}{1!2!2!p^5} + \frac{2x^5}{1!4!p^5}\right) dx = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p^3} - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{20p^5} + \frac{1}{p^5} + \frac{3}{2p^5} + \frac{1}{6p^5}\right)$$

$$= \frac{1}{2p^2} - \frac{7}{6p^4} + \frac{61}{40p^6}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2}\sin^3\alpha\, d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\sin^3\frac{x}{p}\, dx = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-x^2}\left(\frac{x^3}{p^3} - \frac{3x^5}{3!p^5}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2p}\left(\frac{2!}{p^3} - \frac{3\cdot 3!}{3!p^5}\right) = \frac{2}{2p^4} - \frac{3}{2p^6}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{6p^4} + \frac{1}{40p^6} = \frac{1}{2p^2}\left(1 - \frac{1}{3p^2} + \frac{1}{20p^4}\right)$$

" $\cos\alpha\sin\alpha$ " $= \frac{1}{2p^2} - \frac{4}{6p^4} + \frac{16}{40p^6} = \frac{1}{2p^2}\left(1 - \frac{4}{3p^2} + \frac{16}{20p^4}\right)$

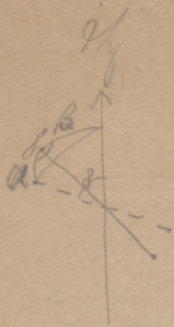
" $\cos^2\alpha\sin\alpha$ " $= \frac{1}{2p^2} - \frac{7}{6p^4} + \frac{61}{40p^6} = \frac{1}{2p^2}\left(1 - \frac{7}{3p^2} + \frac{61}{20p^4}\right)$

" $\sin^2\alpha\sin\alpha$ " $= \frac{6}{6p^4} - \frac{60}{40p^6} = \frac{1}{2p^2}\left(\frac{6}{3p^2} - \frac{60}{20p^4}\right)$

Ferner besitzt der Magnet noch potentielle Energie infolge der Verdrehung aus der Gleichgewichtslage. Nehmen wir an, daß große Abweichungen aus der Gleichgewichtslage sehr selten sind – und wir müssen das annehmen, weil sonst ein Kristall garnicht möglich wäre –, so wird die potentielle Energie für große Werte von α sehr groß werden. Für kleine Werte von α setzen wir in der üblichen Annäherung die rücktreibende Kraft proportional α, die potentielle Energie also proportional α^2 ~~an~~ gleich $\frac{a}{2}\alpha^2$. Die gesamte potentielle Energie des Magneten wird dann:

$$\psi = \frac{a}{2}\alpha^2 + m_0\mathfrak{H}(1-\cos\vartheta)$$

und die Wahrscheinlichkeit W für eine bestimmte Lage des Magneten ist nach Boltzmann proportional $e^{-\frac{\psi}{kT}} = e^{-\frac{a\alpha^2}{2kT}} e^{-\frac{m_0\mathfrak{H}(1-\cos\vartheta)}{kT}}$.



$$m = m_0 \cos\delta, \quad \psi = a^2\frac{\alpha^2}{2} + m_0\mathfrak{F}(1-\cos\delta)$$

$$\bar{m} = \int m\,dw \qquad dw = C e^{-\frac{\psi}{kT}}\sin\alpha\,d\alpha\,d\gamma \qquad \int_0^\pi\int_0^{2\pi} dw = 1$$

$$\bar{m} = \frac{\int_0^\pi\int_0^{2\pi} m_0\cos\delta\, e^{-\frac{\frac{a^2\alpha^2}{2}+m_0\mathfrak{F}-m_0\mathfrak{F}\cos\delta}{kT}}\sin\alpha\,d\alpha\,d\gamma}{\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{-\frac{\frac{a^2\alpha^2}{2}+m_0\mathfrak{F}-m_0\mathfrak{F}\cos\delta}{kT}}\sin\alpha\,d\alpha\,d\gamma}$$

$$e^{-\frac{\psi}{kT}} = e^{-\frac{a^2\alpha^2}{2kT}}e^{+\frac{m_0\mathfrak{F}}{kT}\cos\delta} = e^{-p^2\alpha^2}(1+h\cos\delta), \quad p^2 = \frac{a^2}{2kT}, \quad h = \frac{m_0\mathfrak{F}}{kT}$$

$$\bar{m} = m_0\frac{\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{-p^2\alpha^2}\cos\delta\sin\alpha\,d\alpha\,d\gamma + h\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{-p^2\alpha^2}\cos^2\delta\sin\alpha\,d\alpha\,d\gamma}{\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\,d\alpha\,d\gamma + h\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{-p^2\alpha^2}\cos\delta\sin\alpha\,d\alpha\,d\gamma}$$

$$\cos\delta = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma, \quad \cos^2\delta = \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta\cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$$

$$\bar{m} = m_0\frac{\cos\beta\, 2\pi\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha + h\cos^2\beta\, 2\pi\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\cos^2\alpha\sin\alpha\,d\alpha + h\pi\sin^2\beta\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin^3\alpha\,d\alpha}{2\pi\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\,d\alpha + h\cos\beta . 2\pi\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha}$$

$$\bar{m} = m_0\frac{2\cos\beta\, f(\cos\alpha\sin\alpha) + h\cos^2\beta . 2 f(\cos^2\alpha\sin\alpha) + h\sin^2\beta\, f(\sin^3\alpha)}{2 f(\sin\alpha) + h\cos\beta\, 2 f(\cos\alpha\sin\alpha)}$$

$$\bar{m} = m_0\left[\cos\beta\frac{f(\cos\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)} + h\left\{\cos^2\beta\frac{f(\cos^2\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)} + \sin^2\beta\frac{f(\sin^3\alpha)}{2f(\sin\alpha)} - \left(\cos\beta\frac{f(\cos\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)}\right)^2\right]$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^{p\pi} e^{-x^2}dx = \frac{1}{p}\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad p\alpha = x, \quad \alpha = \frac{x}{p}$$

$$\sin\frac{x}{p} = \frac{x}{1!p} - \frac{x^3}{3!p^3} + \frac{x^5}{5!p^5} - + \cdots$$

$$\cos\frac{x}{p} = 1 - \frac{x^2}{2!p^2} + \frac{x^4}{4!p^4} - + \cdots$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{x}{p}\,dx = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{1!p}\int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx - \frac{1}{3!p^3}\int_0^\infty e^{-x^2}x^3dx + \frac{1}{5!p^5}\int_0^\infty e^{-x^2}x^5dx\right]$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}dy = -\frac{1}{2}e^{-y}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^n dy = -\frac{1}{2}e^{-y}y^n\Big|_0^\infty + \frac{n}{2}\int e^{-y}y^{n-1}dy$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n+1}dx = n\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}x^3dx = \frac{1.2}{2}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}x^5dx = \frac{1.2.3}{2}, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx = \frac{n!}{2}$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{1}{2p}\left[\frac{1!}{1!p} - \frac{2!}{3!p^3} + \frac{3!}{5!p^5}\right] = \frac{1}{2p^2}\left(1 - \frac{1}{3p^2} + \frac{1}{20p^4}\right)$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(1 - \frac{x^2}{2!p^2} + \frac{x^4}{4!p^4}\right)\left(\frac{x}{1!p} - \frac{x^3}{3!p^3} + \frac{x^5}{5!p^5}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2p}\left[\frac{1}{p} - \frac{2!}{3!p^3} + \frac{3!}{5!p^5} - \frac{2!}{2!1!p^3} + \frac{3!}{2!3!p^5} + \frac{3!}{4!1!p^5}\right] = \frac{1}{2p^2}\left(1 - \frac{4}{3p^2} + \frac{16}{20p^4}\right)$$

$$-\frac{1}{3p^2} \quad -\frac{1}{p^2} \qquad \frac{1}{20p^4} + \frac{1}{2p^5} + \frac{1}{4p^5}$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\cos^2\alpha\sin\alpha\,d\alpha=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(1-\frac{x^2}{2!p^2}+\frac{x^4}{4!p^4}\right)^2\left(\frac{x}{1!p}-\frac{x^3}{3!p^3}+\frac{x^5}{5!p^5}\right)dx$$

$$=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(1-\frac{2x^2}{2!p^2}+\frac{x^4}{2!^2p^4}+\frac{2x^4}{4!p^4}\right)\left(\frac{x}{1!p}-\frac{x^3}{3!p^3}+\frac{x^5}{5!p^5}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2p^2}\left(1-\frac{2!}{3!p^2}+\frac{3!}{5!p^4}-\frac{2.2!}{2!1!p^2}+\frac{2.3!}{2!3!p^4}+\frac{3!}{2!2!1!p^4}+\frac{2.3!}{4!1!p^4}\right)$$

$$=\frac{1}{2p^2}\left(1-\frac{1}{3p^2}+\frac{2}{p^2}+\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{p^4}+\frac{3}{2p^4}+\frac{1}{2p^4}\right)=\frac{1}{2p^2}\left(1-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}\right)$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin^3\alpha\,d\alpha=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{x}{1!p}-\frac{x^3}{3!p^3}+\frac{x^5}{5!p^5}\right)^3dx=\frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{x^3}{p^3}-\frac{3x^5}{3!p^5}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2p^2}\left(\frac{2!}{p^2}-\frac{3!\,3}{3!p^4}\right)=\frac{1}{2p^2}\left(\frac{6}{3p^2}-\frac{60}{20p^4}\right)$$

$$f(\sin\alpha)=\frac{1}{2p^2}\left(1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}\right)$$

$$f(\cos\alpha\sin\alpha)=\frac{1}{2p^2}\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}\right)$$

$$f(\cos^2\alpha\sin\alpha)=\frac{1}{2p^2}\left(1-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}\right)$$

$$f(\sin^2\alpha\sin\alpha)=\frac{1}{2p^2}\left(\frac{6}{3p^2}-\frac{60}{20p^4}\right)$$

$$\frac{f(\cos\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)}=\frac{1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}}=\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}\right)\left(1+\frac{1}{3p^2}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}\right)$$

$$=1+\frac{1}{3p^2}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}-\frac{4}{3p^2}-\frac{4}{9p^4}+\frac{16}{20p^4}=1-\frac{1}{p^2}-\frac{1}{3p^4}+\frac{3}{4p^4}$$

$$=1-\frac{1}{p^2}+\cancel{\frac{47}{36p^4}}\,\frac{5}{12p^4}$$

$$\boxed{\frac{f(\cos\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)}}^2=\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{\cancel{47}\,5}{\cancel{36}\,12\,p^4}\right)^2=1-\frac{2}{p^2}+\frac{\cancel{47}\,5}{\cancel{18}\,6\,p^4}+\frac{1}{p^4}=1-\frac{2}{p^2}+\frac{\cancel{65}\,11}{\cancel{18}\,6\,p^4}$$

$$\frac{\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}\right)}=\frac{1-\frac{8}{3p^2}+\frac{32}{20p^4}+\frac{16}{9p^4}}{1-\frac{2}{3p^2}+\frac{2}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}}=\left(1-\frac{8}{3p^2}+\frac{32}{20p^4}+\frac{16}{9p^4}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{3p^2}-\frac{2}{20p^4}-\frac{1}{9p^4}+\frac{4}{9p^4}\right)$$

$$=1+\frac{2}{3p^2}-\frac{2}{20p^4}+\frac{3}{9p^4}-\frac{8}{3p^2}-\frac{16}{9p^4}+\frac{32}{20p^4}+\frac{16}{9p^4}$$

$$=1-\frac{2}{p^2}+\frac{3}{2p^4}+\frac{1}{3p^4}=1-\frac{2}{p^2}+\frac{11}{6p^4}$$

$\frac{3}{2p^4}$

$$\frac{f(\cos^2\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)}=\frac{1-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}}=\left(1-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}\right)\left(1+\frac{1}{3p^2}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}\right)\quad \frac{\overset{80}{279}}{359}$$

$$=1-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}+\frac{1}{3p^2}-\frac{7}{9p^4}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}=1-\frac{6}{3p^2}-\frac{\cancel{6}2}{3\cancel{9}p^4}+\frac{3\cancel{0}}{\cancel{10}p^4}=1-\frac{2}{p^2}+\frac{7}{3p^4}$$

$$\frac{f(\sin^3\alpha)}{f(\sin\alpha)}=\frac{\frac{2}{p^2}-\frac{3}{p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}}=\left(\frac{2}{p^2}-\frac{3}{p^4}\right)\left(1+\frac{1}{3p^2}\right)=\frac{2}{p^2}-\frac{3}{p^4}+\frac{2}{3p^4}=\frac{2}{p^2}-\frac{7}{3p^4}$$

$$\overline{m}=m_0\left[\cos\beta\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{5}{12p^4}\right)+h\left\{\cos^2\beta\left(1-\frac{2}{p^2}+\frac{7}{3p^4}\right)+\sin^2\beta\left(\frac{1}{p^2}-\frac{11}{6p^4}\right)-\cos^2\beta\left(1-\frac{2}{p^2}+\frac{11}{6p^4}\right)\right\}\right]$$

$$\overline{m}=m_0\left[\cos\beta\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{5}{12p^4}\right)+h\left\{\sin^2\beta\cdot\frac{1}{p^2}-\left(\frac{11}{6}\sin^2\beta+\cancel{\left[\frac{11}{6}-\frac{7}{3}\right]}^{\frac{1}{2},}\cos^2\beta\right)\frac{1}{p^4}\right\}\right]$$

$$M=\int_0^\pi\frac{\overline{m}\sin\beta\,d\beta}{2}=\frac{m_0}{2}\frac{h}{p^2}\left[\int_0^\pi\sin^3\beta\,d\beta-\frac{1}{p^2}\left(\frac{11}{6}\int_0^\pi\sin^3\beta\,d\beta-\frac{1}{2}\int_0^\pi\cos^2\beta\,d\cos\beta\right)\right.$$

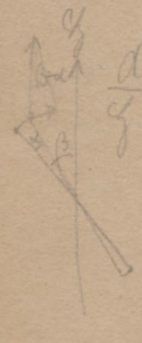
$$\int_0^\pi\sin^3\beta\,d\beta=-\int_0^\pi(1-\cos^2\beta)\,d\cos\beta=-\left[\cos\beta-\frac{\cos^3\beta}{3}\right]_0^\pi=\frac{4}{3};\quad-\int_0^\pi\cos^2\beta\,d\cos\beta=\frac{\cos^3\beta}{3}\Big|_0^\pi=\frac{2}{3}$$

$\frac{28}{9}+\frac{3}{9}$

$$M=\frac{m_0}{2}\frac{2m_0\mathfrak{H}}{a^2}\left[\frac{4}{3}-\frac{2kT}{a^2}\left(\frac{7}{6}\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\right)\right]=\frac{4}{3}\frac{m_0^2}{a^2}\mathfrak{H}\left(1-\frac{kT}{a^2}\frac{11}{6}\right)$$

$\frac{14}{3}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{11}{6}$

$$M=\frac{8}{3}\frac{m_0^2}{a^2}\mathfrak{H}\left(1-\frac{31}{12}\frac{kT}{a^2}\right)$$



$$\frac{\lambda}{\mathfrak{H}}=\sin(\beta-\alpha),\quad \lambda=\mu\mathfrak{H}\sin(\beta-\alpha);\quad A=2\,\frac{l}{2}\,\mu\,\mathfrak{H}\int_0^\alpha\sin(\beta-\alpha)\,d\alpha$$

$$A=m_0\mathfrak{H}\cos(\beta-\alpha)\Big|_0^\alpha=m_0\mathfrak{H}\left[\cos(\beta-\alpha)-\cos\beta\right]$$

$$N=\lambda l=m_0\mathfrak{H}\sin(\beta-\alpha);\quad N=a^2\alpha$$

$$\frac{a^2\alpha}{m_0\mathfrak{H}}=\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha=\sin\beta$$

$$\alpha=\frac{m_0\mathfrak{H}}{a^2}\sin\beta\qquad m=m_0\cos(\beta-\alpha)=m_0(\cos\beta+\alpha\sin\beta)$$

$$m=m_0\cos\beta-\frac{m_0^2\mathfrak{H}}{a}\sin^2\beta$$

$$\overline{m} = m_0\left[\cos\beta\,\frac{f(\cos\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)} + h\left\{\cos^2\beta\,\frac{f(\cos^2\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)} + \sin^2\beta\,\frac{f(\sin^3\alpha)}{2f(\sin\alpha)} - \left(\cos\beta\,\frac{f(\cos\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)}\right.\right.\right.$$

$$\overline{m} = m_0\left[\cos\beta\,\frac{f(\cos\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)} + h\left\{\cos^2\beta\,\frac{f(\cos^2\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)} + \sin^2\beta\,\frac{f(\sin^3\alpha)}{2f(\sin\alpha)} - \left(\cos\beta\,\frac{f(\cos\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)}\right)^2\right\}\right]$$

$$f(\sin\alpha) = \frac{1}{2p^2}\left(1 - \frac{1}{3p^2} + \frac{1}{20p^4}\right) \qquad \frac{1}{1 - \frac{1}{3p^2} + \frac{1}{20p^4}} = 1 + \frac{1}{3p^2} - \frac{1}{20p^4} + \frac{1}{9p^4}$$

$$f(\cos\alpha\sin\alpha) = \frac{1}{2p^2}\left(1 - \frac{4}{3p^2} + \frac{16}{20p^4}\right) \qquad = 1 + \frac{1}{3p^2} + \frac{11}{180p^4}$$

$$f(\cos^2\alpha\sin\alpha) = \frac{1}{2p^2}\left(1 - \frac{7}{3p^2} + \frac{61}{20p^4}\right) \qquad \int_0^\alpha \sin^3\beta\,d\beta = -\int_0^\pi (1-\cos^2\beta)\,d\cos\beta = -\cos\beta\Big|_0^\pi + \frac{\cos^3\beta}{3}\Big|_0^\pi = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$f(\sin^2\alpha\sin\alpha) = \frac{1}{2p^2}\left(\frac{6}{3p^2} - \frac{60}{20p^4}\right) \qquad \int_0^\pi \cos^2\beta\sin\beta\,d\beta = -\int_0^\pi \cos^2\beta\,d\cos\beta = -\frac{\cos^3\beta}{3}\Big|_0^\pi = \frac{2}{3}$$

$$\frac{f(\cos\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)} = \left(1 - \frac{4}{3p^2} + \frac{4}{5p^4}\right)\left(1 + \frac{1}{3p^2} + \frac{11}{180p^4}\right)$$

$$= 1 - \frac{4}{3p^2} + \frac{4}{5p^4} + \frac{1}{3p^2} - \frac{4}{9p^4} + \frac{11}{180p^4}$$

$$= 1 - \frac{1}{p^2} + \frac{5}{12p^4}$$

$$\frac{f(\cos^2\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)} = \left(1 - \frac{7}{3p^2} + \frac{61}{20p^4}\right)\left(1 + \frac{1}{3p^2} + \frac{11}{180p^4}\right) = 1 - \frac{7}{3p^2} + \frac{61}{20p^4} + \frac{1}{3p^2} - \frac{7}{9p^4} + \frac{11}{180p^4}$$

$$= 1 - \frac{2}{p^2} + \frac{7}{3p^4}$$

$$\frac{f(\sin^2\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)} = \left(\frac{2}{p^2} - \frac{3}{p^4}\right)\left(1 + \frac{1}{3p^2}\right) = \frac{2}{p^2} - \frac{3}{p^4} + \frac{2}{3p^4} = \frac{2}{p^2} - \frac{7}{3p^4}$$

$$\left(\frac{f(\cos\alpha\sin\alpha)}{f(\sin\alpha)}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{5}{12p^4}\right)\left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{5}{12p^4}\right) = 1 - \frac{1}{p^2} + \frac{5}{12p^4} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} + \frac{5}{12p^4}$$

$$= 1 - \frac{2}{p^2} + \frac{11}{6p^4}$$

$$\overline{m} = m_0\left[\cos\beta\left(1 - \frac{2}{p^2} + \frac{7}{3p^4}\right) + h\left\{\cos^2\beta\left(1 - \frac{2}{p^2} + \frac{7}{3p^4}\right) - \cos^2\beta\left(1 - \frac{2}{p^2} + \frac{11}{6p^4}\right) +\right.\right.$$

$$\left.\left.+ \sin^2\beta\left(\frac{1}{p^2} - \frac{7}{6p^4}\right)\right\}\right] = m_0\left[\cos\beta(\;) + h\left\{\cos^2\beta\,\frac{1}{2p^4} - \sin^2\beta\,\frac{7}{6p^4} + \sin^2\beta\,\frac{1}{p^2}\right\}\right]$$

$$M = \int_0^\pi \overline{m}\,\frac{n\sin\beta}{2}\,d\beta = \frac{n m_0}{2}\left[\frac{h}{p^2}\int_0^\pi \sin^3\beta\,d\beta + \frac{h}{2p^4}\left(\int_0^\pi \cos^2\beta\sin\beta\,d\beta - \frac{7}{3}\int_0^\pi \sin^3\beta\,d\beta\right)\right]$$

$$M = \frac{n m_0 h}{2p^2}\left[\frac{4}{3} + \frac{1}{2p^2}\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{3}\,\frac{4}{3}\right)\right] = \frac{n m_0 h}{2p^2}\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{p^2}\,\frac{11}{9}\right) = \frac{n m_0 h\,2}{3p^2}\left(1 - \frac{11}{12}\,\frac{1}{p^2}\right)$$

$$h = \frac{m_0 \mathcal{E}}{kT}, \quad p^2 = \frac{a^2}{2kT} \qquad \frac{6}{9} - \frac{28}{9} = -\frac{22}{9} \qquad \frac{h}{p^2} = \frac{m_0\mathcal{E}\,2}{a^2}, \quad \frac{1}{p^2} = \frac{2kT}{a^2} \qquad M = \frac{4}{3}\,\frac{n m_0^2}{a^2}\mathcal{E}\left(1 - \frac{11}{6}\,\frac{kT}{a^2}\right)$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\,d\alpha = -e^{-p^2\alpha^2}\cos\alpha\Big|_0^\pi + \int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}2p^2\alpha\cos\alpha\,d\alpha$$

$$\int e^{-p^2\alpha^2}2p^2\alpha\cos\alpha\,d\alpha = e^{-p^2\alpha^2}2p^2\alpha\sin\alpha\Big|_0^\pi - \int_0^\pi -$$

$$u = e^{-p^2\alpha^2}2p^2\alpha,\quad du = 2p^2\left(e^{-p^2\alpha^2} - 2p^2\alpha^2 e^{-p^2\alpha^2}\right)d\alpha = 2p^2e^{-p^2\alpha^2}\left(1-2p^2\alpha^2\right)d\alpha$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}\,dx = \frac{n!}{2} \qquad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$$

$$\int_0^\infty e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\,d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{x}{p}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{x}{p} - \frac{x^3}{3!p^3} + \cdots\right)dx$$

$$= \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2}\frac{2!}{3!p^3} + - \cdots\right) = \frac{1}{2p^2} - \frac{1}{6p^4} + - \cdots$$

$$\int_0^\infty e^{-p^2\alpha^2}\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(1 - \frac{x^2}{2!p^2} + \frac{x^4}{4!p^4}\right)\left(\frac{x}{p} - \frac{x^3}{3!p^3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{x}{p} - \frac{x^3}{2!p^3} - \frac{x^3}{3!p^3}\right)dx = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2p} - \frac{2!}{2}\frac{2}{3p^3}\right) = \frac{1}{2p^2} - \frac{2}{3p^4}$$

$$\int_0^\infty e^{-p^2\alpha^2}\sin 2\alpha\,d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{2x}{p} - \frac{8x^3}{3!p^3}\right)dx = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\frac{2}{p} - \frac{1}{2}\frac{8\cdot 2!}{3!p^3}\right)$$

$$= \frac{1}{p^2} - \frac{4}{3p^4}$$

$$\int_0^\infty e^{-p^2\alpha^2}\cos^2\alpha\sin\alpha\,d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(1 - \frac{x^2}{2!p^2}\right)^2\left(\frac{x}{p} - \frac{x^3}{3!p^3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{x}{p} - \frac{x^3}{3!p^3} - \frac{2x^3}{2!p^3}\right)dx = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{2p} - \frac{2!}{2p^3}\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{2p^2} - \frac{7}{6p^4}$$

$$\int_0^\infty e^{-p^2\alpha^2}\sin^3\alpha\,d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{x}{p} - \frac{x^3}{3!p^3}\right)^3dx = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{x^3}{p^3}\,dx$$

$$= \frac{2!}{2p^4} = \frac{1}{p^4}$$

$$m = m_0\,\frac{\frac{1}{2}\cos\beta\frac{1}{p^2} - \frac{4}{6}\cos\beta\frac{1}{p^4} + \frac{h}{2}\cos^2\beta\frac{1}{p^2} - \frac{7}{6}h\cos^2\beta\frac{1}{p^4} + \frac{h}{2}\sin^2\beta\frac{1}{p^4}}{\frac{1\cdot 1}{2p^2} - \frac{11}{6p^4} + \frac{h}{2}\cos\beta\frac{1}{p^2} - \frac{2}{3}h\cos\beta\frac{1}{p^4}}$$

$$\frac{d\, y^n e^{-y}}{dy} = -y^n e^{-y} + n y^{n-1} e^{-y}, \quad y^n e^{-y} = -\int e^{-y} y^n dy + n \int y^{n-1} e^{-y} dy$$

$$\int e^{-y} y^n dy = -y e^{-y} + n \int y^{n-1} e^{-y} dy \qquad d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \quad (a-b+c)(a-b+c) = a^2 - ab + ac - bc + b^2 - ab + ac - bc + c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$$

$$\overset{1}{(a} - \overset{3}{b} + \overset{5}{c})^3 = (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc)(a-b+c) = a^3 + ab^2 + ac^2 - 2a^2b + 2a^2c - 2abc$$

$$+2bc^2 + 2ab^2 - bc^2 - b^3 - 2bc^2 + c^3 + b^2c \qquad +ac^2 - a^2b + a^2c \pm 2abc - 2abc$$

$$= \underset{1}{a^3} - \underset{5}{3a^2b} + \underset{7}{3ab^2} + \underset{7}{3a^2c} - \underset{7}{b^3} - \underset{9}{6abc} + \underset{11}{3ac^2} + \underset{11}{3b^2c} - \underset{13}{3bc^2} + \underset{15}{c^3}$$

$$(1-\varepsilon)^{-1} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots, \quad (1-\alpha+\beta) = 1 + \alpha - \beta + (\alpha-\beta)^2 + \cdots = 1 - \alpha + \beta + \alpha^2$$

~~Das Atom~~

1)

$$m = m_0 \cos(\beta - \alpha), \quad \psi = a^2 \frac{\alpha^2}{2} + m_0 \zeta \left[1 - \cos(\beta - \alpha)\right]$$

$$\overline{m} = \int m\, dw = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} m\, e^{-\frac{\psi}{kT}} d\alpha}{\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\frac{\psi}{kT}} d\alpha} = m_0 \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\beta-\alpha)\, e^{-\frac{a^2\alpha^2}{2kT}} \cancel{e^{-\frac{m_0\zeta}{kT}}} e^{+\frac{m_0\zeta\cos(\beta-\alpha)}{kT}} d\alpha}{\int e^{-\frac{a^2\alpha^2}{2kT}} \cancel{e^{-\frac{m_0\zeta}{kT}}} e^{+\frac{m_0\zeta\cos(\beta-\alpha)}{kT}} d\alpha}$$

$$\mu = \frac{a^2}{2kT} \gg 1, \; h = \frac{m_0\zeta}{kT} \ll 1, \; e^{+\frac{m_0\zeta\cos(\beta-\alpha)}{kT}} = 1 + \frac{m_0\zeta\cos(\beta-\alpha)}{kT} = 1 + h\cos(\beta-\alpha)$$

$$\overline{m} = m_0 \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2} \cos(\beta-\alpha)\, d\alpha + h \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2} \cos^2(\beta-\alpha)\, d\alpha}{\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2} d\alpha + h \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2} \cos(\beta-\alpha)\, d\alpha}$$

$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos^2(\beta-\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\beta+2\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\beta \cos 2\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\beta \sin 2\alpha$$

$$\overline{m} = m_0 \frac{\cos\beta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha + \sin\beta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2}\sin\alpha\, d\alpha + \frac{1}{2} h \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2} d\alpha}{\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2} d\alpha}$$

$$\frac{+\frac{1}{2} h \cos 2\beta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2} \cos 2\alpha\, d\alpha + \frac{1}{2} h \sin 2\beta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2} \sin 2\alpha\, d\alpha}{h\cos\beta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2} \cos\alpha\, d\alpha + h \sin\beta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-\mu\alpha^2} \sin\alpha\, d\alpha}$$

$$\int e^{-\mu\alpha^2} \sin\alpha\, d\alpha = \int e^{-\mu\alpha^2} \alpha\, d\alpha = -\frac{1}{2\mu} \int e^{-\mu\alpha^2} d(-\mu\alpha^2) = -\frac{1}{2\mu} e^{-x} \Big]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu\alpha^2} \cos(q\alpha)\, d\alpha = e^{-\frac{q^2}{4\mu}} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu\alpha^2} \cos\alpha\, d\alpha = e^{-\frac{1}{4\mu}} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\mu\alpha^2} \cos 2\alpha\, d\alpha = e^{-\frac{1}{\mu}} \sqrt{\frac{\pi}{\mu}}$$

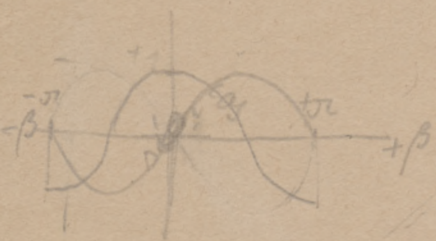
$$\overline{m} = m_0 \frac{\cos\beta \cdot e^{-\frac{1}{4\mu}} \cancel{+ 0} + \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} h \cos 2\beta \cdot e^{-\frac{1}{\mu}} \cancel{+ 0}}{1 + h\cos\beta\, e^{-\frac{1}{4\mu}} \cancel{+ 0}}$$

$$\overline{m} = m_0 \left[\cos\beta\, e^{-\frac{1}{4\mu}} + \frac{1}{2} h + \frac{1}{2} h \cos 2\beta\, e^{-\frac{1}{\mu}} - h\cos^2\beta\, e^{-\frac{1}{2\mu}}\right]$$

$$\overline{m} = m_0 \left[\cos\beta\, e^{-\frac{1}{4\mu}} + \frac{1}{2} h \left(\cancel{1 + \cos 2\beta} - \frac{\cos 2\beta}{\mu} - \cancel{2}\cos^2\beta + \frac{\cos^2\beta}{\mu}\right)\right]$$

$$\overline{m} = m_0 \left[\cos\beta\, e^{-\frac{1}{4\mu}} + h \frac{\cos^2\beta - \cos 2\beta}{2\mu}\right] = m_0 \left[\cos\beta\, e^{-\frac{1}{4\mu}} + \frac{h}{2\mu} \sin^2\beta\right]$$

$$m = \int_{-\pi}^{+\pi} \overline{m}\, n \frac{d\beta}{2\pi} = \frac{n m_0}{2\pi}\left[e^{-\frac{1}{4p}} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos\beta\, d\beta + \frac{h}{2p}\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2\beta\, d\beta\right] \qquad 2)$$



$$\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2\beta\, d\beta = \int_{0}^{+\pi}(\sin^2\beta+\cos^2\beta)\, d\beta = \int_{0}^{+\pi} d\beta = \pi$$

$$m = \frac{n m_0}{2\pi}\,\frac{h\pi}{2p} = \frac{n m_0}{4}\,\frac{h}{p} = \frac{1}{2}\, n m_0^2 \frac{\mathcal{E}}{a^2}$$

$$h = \frac{m_0 \mathcal{E}}{kT}, \quad p = \frac{a^2}{2kT}, \quad \frac{h}{p} = \frac{2 m_0 \mathcal{E}}{a^2}$$

$$\overline{m} = m_0 \frac{\cos\beta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha + \frac{1}{2}h\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{2}h\cos 2\beta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos 2\alpha\, d\alpha}{\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2} d\alpha + h\cos\beta \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = e^{-\frac{1}{4p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2} d\alpha$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos 2\alpha\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}\cos 2\alpha\, d\alpha = e^{-\frac{1}{p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}, \qquad = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

$$\overline{m} = m_0 \frac{e^{-\frac{1}{4p}}\cos\beta + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h e^{-\frac{1}{p}}\cos 2\beta}{1 + h e^{-\frac{1}{4p}}\cos\beta}$$

$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha - \cos^2\alpha$

$$\overline{m} = m_0\left(e^{-\frac{1}{4p}}\cos\beta + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h e^{-\frac{1}{p}}\cos 2\beta\right)\left(1 - h e^{-\frac{1}{4p}}\cos\beta + h^2 e^{-\frac{1}{2p}}\cos^2\beta\right)$$

$$\overline{m} = m_0\Big(e^{-\frac{1}{4p}}\cos\beta + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}h e^{-\frac{1}{p}}\cos 2\beta - h e^{-\frac{1}{2p}}\cos^2\beta - \frac{1}{2}h^2 e^{-\frac{1}{4p}}\cos\beta$$
$$- \frac{1}{2}h^2 e^{-\frac{5}{4p}}\cos 2\beta\cos\beta + h^2 e^{-\frac{3}{4p}}\cos^3\beta\Big)$$

$$\overline{m} = m_0\Big[e^{-\frac{1}{4p}}\cos\beta + \frac{1}{2}h\big(\underbrace{1 + \cos 2\beta - 2\cos^2\beta}_{0}\big) - \frac{1}{2}h^2\cos\beta\big(\underbrace{1 + \cos 2\beta - 2\cos^2\beta}_{0}\big)$$
$$- \frac{1}{2}\frac{h}{p}\big(\underbrace{\cos 2\beta - \cos^2\beta}_{-\sin^2\beta}\big) + \frac{1}{2}\frac{h^2}{4p}\cos\beta\big(\underbrace{1 + 5\cos 2\beta - 6\cos^2\beta}_{-4\sin^2\beta}\big)$$

$$\overline{m} = m_0\left[e^{-\frac{1}{4p}}\cos\beta + \frac{1}{2}\frac{h}{p}\sin^2\beta - \frac{1}{2}\frac{h^2}{p}\sin^2\beta\cos\beta\right]$$

$$m = \int_{-\pi}^{+\pi}\overline{m}\, n\frac{d\beta}{2\pi} = \frac{n m_0}{2\pi}\left[e^{-\frac{1}{4p}}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos\beta\, d\beta + \frac{1}{2}\frac{h}{p}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2\beta\, d\beta - \frac{1}{2}\frac{h^2}{p}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2\beta\cos\beta\, d\beta\right]$$

3)

$$\cancel{\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{-\pi\sqrt{p}}^{+\pi\sqrt{p}} e^{-x^2} dx}$$

die Glieder mit h^2 fallen weg?

$$\overline{m} = m_0\left(e^{-\frac{1}{4p}}\cos\beta + \frac{1}{2}h\left[1 + e^{-\frac{1}{p}}\cos 2\beta - 2e^{-\frac{1}{2p}}\cos^2\beta\right]\right)$$

$$1 + e^{-\frac{1}{p}}\cos 2\beta - 2e^{-\frac{1}{2p}}\cos^2\beta = 1 + \overset{0}{\cos 2\beta - 2\cos^2\beta} - \frac{1}{p}(\underbrace{\cos 2\beta - \cos^2\beta}_{-\sin^2\beta})$$
$$+\frac{1}{2p^2}(\underbrace{\cos 2\beta - \frac{1}{2}\cos^2\beta}_{\frac{1}{2}\cos^2\beta - \sin^2\beta})$$

$$\overline{m} = m_0\left[e^{-\frac{1}{4p}}\cos\beta + \frac{h}{2p}\sin^2\beta + \frac{h}{4p^2}\left(\frac{1}{2}\cos^2\beta - \sin^2\beta\right)\right].$$

$$m = \int_{-\pi}^{+\pi}\overline{m}\, n\frac{d\beta}{2\pi} = \frac{m_0 n}{2\pi}\left[e^{-\frac{1}{4p}}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos\beta\, d\beta + \frac{h}{2p}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2\beta\, d\beta + \frac{h}{4p^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{1}{2}\cos^2\beta - \sin^2\beta\right)d\beta\right]$$

$$m = \frac{m_0 n}{2\pi}\left[0 + \frac{h}{2p}\pi + \frac{h}{4p^2}\left(\frac{\pi}{2} - \pi\right)\right] = \frac{m_0 n}{2\pi}\left(\frac{h}{2p}\pi - \frac{h}{8p^2}\pi\right)$$

$$m = \frac{m_0 n}{4}\frac{h}{p}\left(1 - \frac{1}{4p}\right), \quad \frac{h}{p} = \frac{2m_0 g}{a^2}, \quad \frac{1}{4p} = \frac{kT}{2a^2}$$

$$m = \frac{m_0^2 n}{2}\frac{g}{a^2}\left(1 - \frac{kT}{2a^2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - + \cdots\right)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}d\alpha - \frac{1}{2!}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}\alpha^2 d\alpha + \frac{1}{4!}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}\alpha^4 d\alpha$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx - \frac{1}{2!\,p^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^2 dx + \frac{1}{4!\,p^{\frac{5}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^4 dx - + \cdots$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^{2n}dx = \frac{1.3.\cdots(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^4 dx = \frac{1.3}{2.2}\sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(1 - \frac{1}{2.2!}\frac{1}{p} + \frac{1.3}{2^2.4!}\frac{1}{p^2} - \frac{1.3.5}{2^3.6!}\frac{1}{p^3} + - \cdots\right)$$

$$\frac{1.3.5}{6!} = \frac{1.3.5}{1.3.5.2.4.6} = \frac{1}{2^3.3!}, \quad \frac{1.3.\cdots(2n-1)}{(2n)!} = \frac{1.3.\cdots(2n-1)}{1.3.\cdots(2n-1).2^n.n!} = \frac{1}{2^n n!}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(1 - \frac{1}{1!}\frac{1}{4p} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(4p)^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(4p)^3} + - \cdots\right) = e^{-\frac{1}{4p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-+\cdots\right)d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}d\alpha - \frac{1}{2!}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\alpha^2 d\alpha +- \cdots$$

$$= \frac{2}{\sqrt{p}}\left[\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx - \frac{1}{2!}\frac{1}{p}\int_0 e^{-x^2}x^2 dx + \frac{1}{4!}\frac{1}{p^2}\int_0 e^{-x^2}x^4 dx -+\cdots\right]$$

$$\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-x_0^2}}{2x_0}\left(1-\frac{1}{(2x_0)}+\frac{1.3}{(2x_0)^2}-+\cdots\right)$$

$$\int_0^{x_0} e^{-x^2}x^2 dx = \frac{1}{2}\int_0 e^{-x^2}dx - \frac{1}{2}x_0 e^{-x_0^2}$$

$$\int_0^{x_0} e^{-x^2}x^4 dx = \frac{1.3}{2}\int_0^{x_0} e^{-x^2}x^2 dx - \frac{1}{2}x_0^3 e^{-x_0^2} = \frac{1.3}{2^2}\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx - \frac{1.3}{2^2}x_0 e^{-x_0^2} - \frac{1}{2}x_0^3 e^{-x_0^2}$$

$$\int_0^{x_0} e^{-x^2}x^4 dx = \frac{1.3}{2^2}\int_0 e^{-x^2}dx - \frac{x_0 e^{-x_0^2}}{2}\left(\frac{1.3}{2} - x_0^2\right)$$

$$\int_0^{x_0} e^{-x^2}x^6 dx = \frac{1.3.5}{2}\int_0^{x_0} e^{-x^2}x^4 dx - \frac{1}{2}x_0^5 e^{-x_0^2} = \frac{1.3.5}{2^3}\int_0^{x_0} e^{-x_0^2}dx - \frac{1.3.5}{2^3}x_0 e^{-x_0^2}$$

$$-\frac{1.3.5}{2^2}x_0^3 e^{-x_0^2} - \frac{1}{2}x_0^5 e^{-x_0^2} = \frac{1.3.5}{2^3}\int^{x_0} e^{-x^2}dx - x_0 e^{-x_0^2}\left(\frac{1.\,1.3.\,1.3.5}{2^3} + \frac{1.\,1.3}{2^2}x_0^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_0^{x_0} e^{-x_0^2}x^{2n}dx = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx - x_0 e^{-x_0^2}\left(\frac{1.\,1.3\ldots1.3\ldots(2n-1)}{2^n} + \frac{1.\,1.3\ldots1.3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}x_0^2 + \cdots + \frac{1}{2}x_0^{2(n-1)}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\sqrt{p}}\Bigg[\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx$$

$$-\frac{1}{2!}\frac{1}{p}\left(\frac{1}{2}\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx - \frac{1}{2}x_0 e^{-x_0^2}\right)$$

$$+\frac{1}{4!}\frac{1}{p^2}\left[\frac{1.3}{2^2}\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx - x_0 e^{-x_0^2}\left(\frac{1.3}{2^2}+\frac{1}{2}x_0^2\right)\right]$$

$$-\frac{1}{6!}\frac{1}{p^3}\left[\frac{1.3.5}{2^3}\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx - x_0 e^{-x_0^2}\left(\frac{1.\,1.3.\,1.3.5}{2^3}+\frac{1.\,1.3}{2^2}x_0^2+\frac{1}{2}x_0^4\right)\right]$$

$$\vdots$$

$$\pm\frac{1}{(2n)!}\frac{1}{p^n}\left[\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx - x_0 e^{-x_0^2}\left(\frac{1.\,1.3\ldots1.3\ldots(2n-1)}{2^n}+\frac{1.\,1.3\ldots1.3\ldots(2n-3)}{2^{n-1}}x_0^2 + \cdots + \frac{1}{2}x^{2(n-1)}\right)\right]\Bigg]$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\sqrt{p}}\Big[\Big(1-\frac{1}{2}\frac{1}{2!}\frac{1}{p}+\frac{1.3}{2^2}\frac{1}{4!}\frac{1}{p^2}-+\cdots\Big)\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx +$$

$$+x_0 e^{-x_0^2}\Big\{\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2!}\frac{1}{p}-\frac{1.1.3}{2^2}\frac{1}{4!}\frac{1}{p^2}+\frac{1.1.3\,1.3.5}{2^3}\frac{1}{6!}\frac{1}{p^3}-+\cdots\Big)$$

$$-x_0^2\Big(\frac{1}{2}\frac{1}{4!}\frac{1}{p^2}-\frac{1.1.3}{2^2}\frac{1}{6!}\frac{1}{p^3}+-\cdots\Big)$$

$$+x_0^4\Big(\frac{1}{2}\frac{1}{6!}\frac{1}{p^3}-+\cdots\Big)-+\cdots\Big]$$

$x_0 = \pi\sqrt{p}$

$x_0^2 = p\pi^2$

$\frac{1}{p} = \frac{\pi^2}{x_0^2}$

$$=\frac{2}{\sqrt{p}}\Big[e^{-\frac{\pi^2}{4x_0^2}}\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx+\frac{1}{x_0}e^{-x_0^2}\Big\{\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi^2}{2!}-\frac{\pi^4}{4!}+\frac{\pi^6}{6!}-+\cdots\Big)-\frac{1}{2}\frac{1.3}{2}\frac{1}{x_0^2}\Big(\frac{\pi^4}{4!}-\frac{\pi^6}{6!}+-\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{1.3}{2}\frac{1.3.5}{2}\frac{1}{x_0^4}\Big(\frac{\pi^6}{6!}-\frac{\pi^8}{8!}+-\cdots\Big)-+\cdots\Big\}\Big]$$

$\cos\alpha = 1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-+\cdots$, $\cos\pi = -1 = 1-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}-+\cdots$

$\frac{\pi^2}{2!}-\frac{\pi^4}{4!}+-\cdots = 2$, $\frac{\pi^4}{4!}-\frac{\pi^6}{6!}+-\cdots = \frac{\pi^2}{2!}-2$, $\frac{\pi^6}{6!}-\frac{\pi^8}{8!}+-\cdots = 2-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}$

$$=\frac{2}{\sqrt{p}}\Big[e^{-\frac{\pi^2}{4x_0^2}}\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx+\frac{1}{x_0}e^{-x_0^2}\Big\{\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2}\frac{1}{x_0^2}\Big(\frac{\pi^2}{2!}-2\Big)+\frac{1}{2}\frac{1.3}{2}\frac{1.3.5}{2}\frac{1}{x_0^4}\Big(2-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}\Big)\Big\}$$

$$\{\quad\} = 1-\frac{1}{2}\frac{1.3}{2}\frac{1}{2!}\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\frac{1.3}{2}\frac{2}{x_0^2}\Big(1-$$

$d\,uv = u\,dv + v\,du$, $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\,d\alpha = \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}d(\sin\alpha) = e^{-p\alpha^2}\sin\alpha\Big|_{-\pi}^{+\pi} + 2p\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\alpha\sin\alpha\,d\alpha$$

$d\,e^{-p\alpha^2} = e^{-p\alpha^2}\cdot -p\,2\alpha\,d\alpha$

$$x_0 = \pi\sqrt{p}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{p}}\int_{-x_0}^{+x_0} e^{-x^2}\cos\frac{x}{\sqrt{p}}\,dx\ ,\ x^2 = p\alpha^2,\ x = \alpha\sqrt{p},\ \alpha = \frac{x}{\sqrt{p}}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{p}}\int_{-x_0}^{+x_0} e^{-x^2}\left(1 - \frac{x^2}{2!\,p} + \frac{x^4}{4!\,p^2} - + \cdots\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}}\left\{\int_{-x_0}^{+x_0} e^{-x^2}dx - \frac{1}{2!\,p}\int_{-x_0}^{+x_0} e^{-x^2}x^2dx + \frac{1}{4!\,p^2}\int_{-x_0}^{+x_0} e^{-x^2}x^4dx - + \cdots\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi},\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^2dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^4dx = \frac{1.3}{2\,2}\sqrt{\pi},\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}x^{2n}dx = \frac{1.3.(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left\{1 - \frac{1}{2.2!}\frac{1}{p} + \frac{1.3}{2^2\,4!}\frac{1}{p^2} - + \cdots\right\}$$

$$\frac{1.3}{2^2.4!} = \frac{1.3}{2^2.2^2\,1.3\,1.2} = \frac{1}{2^2 2^2 2!},\ \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n.(2n)!} = \frac{1}{2^n.2^n\,n!} = \frac{1}{4^n n!}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left(1 - \frac{1}{4p} + \frac{1}{2!}\frac{1}{(4p)^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(4p)^3} + - \cdots\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{p}}\,e^{-\frac{1}{4p}}$$

$$\int_{-x_0}^{+x_0} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} - \frac{e^{-x_0^2}}{x_0}$$

$$\int_{-x_0}^{+x_0} e^{-x^2}x^2dx = \frac{1}{2}\int_{-x_0}^{+x_0} e^{-x^2}dx - x_0e^{-x_0^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2x_0}e^{-x_0^2} - x_0e^{-x_0^2}$$

$$\int_{-x_0}^{+x_0} e^{-x^2}x^4dx = \frac{3}{4}\int_{-x_0}^{+x_0} e^{-x^2}dx - \frac{3}{2}x_0e^{-x_0^2} - \frac{1}{2}x_0^3e^{-x_0^2} =$$

$$= \frac{1.3}{2\,2}\sqrt{\pi} - \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{e^{-x_0^2}}{x_0} - \frac{3}{2}x_0e^{-x_0^2} - \frac{1}{2}x_0^3e^{-x_0^2}$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\sqrt{p}}\left[e^{-\frac{1}{4p}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-p\pi^2}}{2\pi\sqrt{p}}\right) + \frac{e^{-p\pi^2}}{2\pi\sqrt{p}}\right].$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\sqrt{p}}\left[e^{-\frac{1}{4p}}\int_0^{\pi\sqrt{p}} e^{-x^2}dx + \frac{e^{-p\pi^2}}{\pi\sqrt{p}}\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{1.3}{2}\,\frac{1}{p\pi^2}\left(\frac{\pi^2}{2!} - 2\right)\right.\right.$$
$$+ \frac{1}{2}\,\frac{1.3}{2}\,\frac{1.3.5}{2}\,\frac{1}{p^2\pi^4}\left(2 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!}\right.$$

$$\int_0^{x_0} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-x_0^2}}{2x_0}\left(1 - \frac{1}{(2x_0^2)} + \frac{1.3}{(2x_0^2)^2} - + \cdots\right)\right.$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-p\pi^2}}{2\pi\sqrt{p}}\left(1 - \frac{1}{2p\pi^2} + \frac{1.3}{4p^2\pi^4} - + \cdots\right)$$

$$e^{-\frac{1}{4p}} = 1 - \frac{1}{4p} + \frac{1}{2.16p^2} - + \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\sqrt{p}}\left\{\left(1 - \frac{1}{4p} + \frac{1}{32p^2}\right)\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{e^{-p\pi^2}}{2\pi\sqrt{p}}\left(1 - \frac{1}{2p\pi^2} + \frac{3}{4p^2\pi^4}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{e^{-p\pi^2}}{2\pi\sqrt{p}}\left[1 - \frac{3}{2}\left(\frac{\pi^2}{2!} - 2\right)\frac{1}{p\pi^2} + \frac{45}{4}\left(2 - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^4}{24}\right)\frac{1}{p^2\pi^4}\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{p}}\left\{\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{8p} + \frac{\sqrt{\pi}}{64p^2} - \frac{e^{-p\pi^2}}{2\pi\sqrt{p}}\left(1 - \cancel{\frac{1}{4p}} + \cancel{\frac{1}{32p^2}} - \cancel{\frac{1}{2p\pi^2}} + \cancel{\frac{1}{8p^2\pi^2}} + \frac{3}{4p^2\pi^4}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{e^{-p\pi^2}}{2\pi\sqrt{p}}\left(1 + \cancel{\frac{2}{p\pi^2}} - \cancel{\frac{3}{4p}} + \frac{45}{2p^2\pi^4} - \cancel{\frac{45}{8p^2\pi^2}} + \cancel{\frac{45}{96p^2}}\right)\right.$$

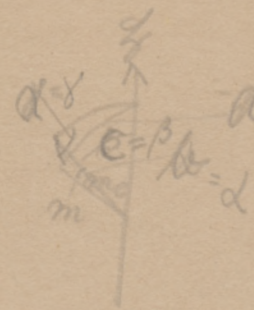
$$= \sqrt{\frac{\pi}{p}}\left[1 - \frac{1}{4p} + \frac{1}{32p^2} - \frac{e^{-p\pi^2}}{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{3}{2p\pi^2} + \frac{1}{2p^2} - \frac{11}{2p^2\pi^2} + \frac{93}{4p^2\pi^4}\right)\right]$$

$$\overline{m} = m_0\left[e^{-\frac{1}{4}r}\cos\beta + \frac{h}{2p}\sin^2\beta + \frac{h}{4p^2}\left(\frac{1}{2}\cos^2\beta - \sin^2\beta\right)\right]$$

$m_r = m_0 \cos\beta$, $dn = n w_\beta \, d\beta$, $m = m_0 \int_{-\pi}^{+\pi} \cos\beta \, n w_\beta \frac{d\beta}{2\pi} = 0$

$0 = \frac{m_0 n}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos\beta \, w_\beta \, d\beta$, $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos\beta \, w_\beta \, d\beta = 0$ z. B. $w_\beta = 1$

Räumliches Problem



$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

$$\cos \delta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$m = m_0 \cos \delta, \quad \psi = \frac{a^2 \alpha^2}{2} + m_0 \mathfrak{E}\left[1 - \cos \delta\right]$$

$$\overline{m} = \int m\, dw, \quad dw = e^{-\frac{\psi}{kT}} \frac{d\gamma \sin \alpha\, d\alpha}{4\pi} \quad \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} dw = 1$$

$$p^2 = \frac{a^2}{2kT} \gg 1, \quad h = \frac{m_0 \mathfrak{E}}{kT} \ll 1, \quad e^{\frac{m_0 \mathfrak{E}}{kT}\cos \delta} = 1 + h \cos \delta$$

$$\overline{m} = \frac{\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-\frac{a^2\alpha^2}{2kT}} \cancel{e^{-\frac{m_0\mathfrak{E}}{kT}}} e^{\frac{m_0\mathfrak{E}}{kT}\cos\delta} m_0 \cos\delta \sin\alpha\, d\gamma\, d\alpha}{\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-\frac{a^2\alpha^2}{2kT}} \cancel{e^{-\frac{m_0\mathfrak{E}}{kT}}} e^{\frac{m_0\mathfrak{E}}{kT}\cos\delta} \sin\alpha\, d\gamma\, d\alpha}$$

$$\overline{m} = m_0 \frac{\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos\delta \sin\alpha\, d\gamma\, d\alpha + h \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos^2\delta \sin\alpha\, d\gamma\, d\alpha}{\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \sin\alpha\, d\gamma\, d\alpha + h \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos\delta \sin\alpha\, d\gamma\, d\alpha}$$

$$\cos\delta = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma$$

$$\overline{m} = m_0 \frac{\cos\beta \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos\alpha \sin\alpha\, d\gamma\, d\alpha + \sin\beta \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \sin^2\alpha \cos\gamma\, d\gamma\, d\alpha}{\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \sin\alpha\, d\gamma\, d\alpha + }$$

$$\frac{+ h \cos^2\beta \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos^2\alpha \sin\alpha\, d\gamma\, d\alpha + h \sin^2\beta \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \sin^3\alpha \cos^2\gamma\, d\gamma\, d\alpha}{+ h \cos\beta \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos\alpha \sin\alpha\, d\gamma\, d\alpha}$$

$$\frac{+ h\, 2 \sin\beta \cos\beta \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \cos\alpha \sin^2\alpha \cos\gamma\, d\gamma\, d\alpha}{h \sin\beta \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{\pi} e^{-p^2\alpha^2} \sin^2\alpha \cos\gamma\, d\gamma\, d\alpha}$$

$$\cos\beta \frac{1-\frac{4}{3p^2}}{1-\frac{1}{3p^2}} + h\cos^2\beta \frac{1-\frac{7}{3p^2}}{1-\frac{1}{3p^2}} + h\sin^2\beta \frac{\frac{1}{p^2}}{1-\frac{1}{3p^2}} - h\cos^2\beta \left(\frac{1-\frac{4}{3p^2}}{1-\frac{1}{3p^2}}\right)^2$$

$$\cos\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{1}{3p^2}\right) + h\cos^2\beta\left(1-\frac{7}{3p^2}+\frac{1}{3p^2}\right) + h\sin^2\beta\frac{1}{p^2} - h\cos^2\beta\left(1-\frac{2}{p^2}\right)$$

$$\frac{h}{p^2}(\sin^2\beta$$

$$\cos\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}\right) + h\cos^2\beta\left(1-\frac{7}{3p^2}\right) + h\sin^2\beta\frac{1}{p^2}$$

$$\cos\beta\frac{1}{3p^2} \qquad h\cos^2\beta\frac{1}{3p^2}$$

$$-h\cos^2\beta\left(1-\frac{8}{3p^2}+\frac{2}{3p^2}\right)$$

$$\frac{1}{1-\alpha+\beta} = \frac{1}{1-\varepsilon} = 1+\varepsilon+\varepsilon^2$$

$$\cos\beta\,\frac{1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}}+h\cos^2\beta\,\frac{1-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}}+h\sin^2\beta\,\frac{\frac{3}{3p^2}-\frac{30}{20p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}}$$

$$-h\cos^2\beta\left(\frac{1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}}\right)^2$$

$$\frac{1}{1-\alpha+\beta}=\frac{1}{(1-\alpha)(1+\frac{\beta}{1-\alpha})}=(1+\alpha)(1-\frac{\beta}{1-\alpha})$$
$$=\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\frac{\beta}{1-\alpha}\right)=\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\beta}{(1-\alpha)^2}=1+\alpha-\frac{\beta^+}{1-2\alpha}$$
$$=1+\alpha-\beta(1+2\alpha)$$
$$=1+\alpha-\beta-2\alpha\beta$$

$$(1-\varepsilon)^{-1}=1+\varepsilon+\varepsilon^2 \quad \varepsilon=(\alpha\mp\beta) \quad (1-\alpha+\beta)^{-1}=1+\alpha-\beta+\alpha^2\mp2\alpha\beta+\beta^2$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}}=1+\frac{1}{3p^2}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}$$

$$\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}\right)\left(1\qquad\right)=1+\frac{1}{3p^2}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}=1-\frac{1}{p^2}+\frac{3}{4p^4}-\frac{\cancel{3}1}{3\cancel{x}p^4}$$
$$-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}-\frac{4}{9p^4}\quad=1-\frac{1}{p^2}+\frac{5}{12p^4}$$

$$\left(1-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}\right)\left(\ \right)=1+\frac{1}{3p^2}-\frac{1}{20p^4}+\frac{1}{9p^4}=1-\frac{2}{p^2}+\frac{3}{p^4}-\frac{\cancel{6}2}{3\cancel{x}p^4}$$
$$-\frac{7}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}-\frac{7}{9p^4}\quad=1-\frac{2}{p^2}+\frac{\cancel{14}7}{3p^4}$$

$$\left(\frac{3}{3p^2}-\frac{30}{20p^4}\right)\left(\ \right)=\frac{3}{3p^2}-\frac{30}{20p^4}+\frac{\cancel{3}1}{3p^4}=\frac{1}{p^2}-\frac{7}{6p^4}$$

$$\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{5}{12p^4}\right)^2=1+\frac{1}{p^4}-\frac{2}{p^2}+\frac{5}{\cancel{1}6p^4}=1-\frac{2}{p^2}+\frac{\cancel{x}11}{\cancel{x}6p^4}$$

$$\overline{m}=m_0\left\{\cos\beta\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{5}{12p^4}\right)+h\left[\cos^2\beta\left(\cancel{1-\frac{2}{p^2}}+\frac{14}{3p^4}\right)\right.\right.$$
$$-\cos^2\beta\left(\cancel{1-\frac{2}{p^2}}+\frac{11}{\cancel{x}6p^4}\right)$$
$$\left.\left.+\sin^2\beta\left(\frac{1}{p^2}-\frac{7}{6p^4}\right)\right]\right\}$$

$$\overline{m}=m_0\left\{\cos\beta\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{7}{36p^4}\right)+\frac{h}{p^2}\sin^2\beta+\frac{h}{p^4}\left(\overset{9/6}{\frac{3}{2}}\cos^2\beta-\frac{7}{6}\sin^2\beta\right)\right\}$$

$$\frac{\cos\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}\right)+h\cos^2\beta\left(1-\frac{7}{3p^2}\right)+h\sin^2\beta\,\frac{1}{p^2}}{1-\frac{1}{3p^2}+h\cos\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}\right)} \qquad \frac{2h}{3p^2}\cos\beta$$

$$\cancel{\cos\beta}-\cancel{\cos\beta\frac{4}{3p^2}}+\cancel{h\cos^2\beta}-h\cos^2\beta\frac{4}{3p^2}+h\sin^2\beta\frac{1}{p^2}+\cancel{\cos\beta}-\cancel{\frac{1}{3p^2}}+h\cos^2\beta\frac{1}{3p^2}$$

$$-\cancel{h\cos^2\beta}+h\cos^2\beta\frac{8}{3p^2}\mp\frac{2h}{3p^2}\cos^2\beta=\frac{h}{p^2}\left(\sin^2\beta-\frac{7}{3}\cos^2\beta+\frac{1}{3}\cos^2\beta\pm\frac{8}{3}\cos^2\beta\mp\frac{2}{3}\cos^2\beta\right.$$

$$\overline{m} = m_0 \frac{\cos\beta\,\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin 2\alpha\, d\alpha + h\cos^2\beta\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\cos^2\alpha\sin\alpha\, d\alpha +}{\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\, d\alpha +}$$

$$\frac{+h\sin^2\beta\,\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin^3\alpha\, d\alpha}{+h\cos\beta\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\cos\alpha\sin\alpha\, d\alpha}$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2p}$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{1}{p}\int_0^{\pi p} e^{-x^2}\sin\frac{x}{p}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^{\pi p} e^{-x^2}\left(\frac{x}{p} - \frac{1}{3!}\frac{x^3}{p^3} + \dots\right)dx$$

$$= \frac{1}{p^2}\int_0^{\pi p} e^{-x^2}x\,dx - \frac{1}{3!\,p^4}\int_0^{\pi p} e^{-x^2}x^3\,dx + - \dots$$

$$\int_0^{x_0} e^{-x^2}x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{x_0^2} e^{-y}dy = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{x_0^2} = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x_0^2}$$

$$d\left(e^{-x^2}x^{2n}\right) = -2x\,e^{-x^2}x^{2n}dx + 2n\,x^{2n-1}e^{-x^2}dx$$

$$\cancel{\int e^{-x^2}x^{2n-1}dx = \frac{1}{2n}x^{2n}e^{-x^2} + \frac{1}{n}\int e^{-x^2}x^{2n+1}dx}$$

$$\int e^{-x^2}x^{2n+1}dx = \frac{1}{2}x^{2n}e^{-x^2} + n\int e^{-x^2}x^{2n-1}dx \qquad \int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n+1}dx = n\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx$$

$$\int_0^{x_0} e^{-x^2}x^3\,dx = \frac{1}{2}x_0^2 e^{-x_0^2} + 2\frac{1}{2} - e^{-x_0^2}$$

$$\int_0^{x_0} e^{-x^2}x^5\,dx = \frac{1}{2}x_0^4 e^{-x_0^2} + \frac{3}{2}x_0^2 e^{-x_0^2} + \frac{1.2.3}{2} - \frac{1.2.3}{2}e^{-x_0^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx = \frac{n!}{2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}y^{(n-1)}dy$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\, d\alpha = \frac{1}{p^2}\frac{1}{2} - \frac{1\ 2!}{2.3!\,p^4} + \frac{1.\,3!}{2.5!\,p^6} - +$$

$$\frac{n!}{(2n-1)!} = \frac{n!\,2n}{(2n)!}$$

$$m = m_0 \frac{\frac{1}{2}\cos\beta - \frac{4}{6}\cos\beta\frac{1}{p^2} + \frac{h}{2}\left(\cos^2\beta - \frac{7}{3}\cos^2\beta\frac{1}{p^2} + \sin^2\beta\frac{1}{p^2}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\frac{1}{p^2} + \frac{h}{2}\left(\cos\beta - \frac{4}{3}\cos\beta\frac{1}{p^2}\right)}$$

$$m = m_0\left[\frac{1}{2}\cos\beta - \frac{4}{6}\cos\beta\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{h}{2}\left(\cos^2\beta - \frac{7}{3}\cos^2\beta\cdot\frac{1}{p^2} + \sin^2\beta\frac{1}{p^2}\right)\right]\cdot$$

$$\cdot 2\left[1 + \frac{1}{3}\frac{1}{p^2} - h\left(\cos\beta - \frac{4}{3}\cos\beta\frac{1}{p^2}\right) \mp \frac{2h}{3p^2}\left(\cos\beta - \frac{4}{3}\cos\beta\frac{1}{p^2}\right)\right]$$

$$m = m_0 2\left[\frac{1}{2}\cos\beta - \frac{4}{6}\cos\beta\frac{1}{p^2} + \frac{h}{2}\left(\cos^2\beta - \frac{7}{3}\cos^2\beta\cdot\frac{1}{p^2} + \sin^2\beta\frac{1}{p^2}\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{6}\cos\beta\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{h}{6p^2}\cos^2\beta - h\left(\frac{1}{2}\cos^2\beta - \frac{4}{6}\cos^2\beta\cdot\frac{1}{p^2} - \frac{2}{3}\cos^2\beta\cdot\frac{1}{p^2}\right)$$

$$\left. - \frac{4h}{3p^2}\cos^2\beta\right]$$

$$m = m_0\left[\cos\beta - \frac{4}{3}\cos\beta\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1}{3}\cos\beta\cdot\frac{1}{p^2} + h\left(\cos^2\beta - \cos^2\beta\right) + \frac{h}{p^2}\left(\sin^2\beta\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{7}{3}\cos^2\beta + \frac{1}{3}\cos^2\beta + \frac{4}{3}\cos^2\beta + \frac{4}{3}\cos^2\beta - \frac{2}{3}\cos^2\beta\right)\right]$$

$$m = m_0\left[\cos\beta - \cos\beta\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{h}{p^2}\left(\sin^2\beta \cancel{- 4\cos^2\beta}\right)\right]$$

$$n_\beta = n\,dw = n\frac{2\pi\sin\beta\,d\beta}{4\pi} = n\frac{\sin\beta}{2}d\beta \qquad \beta = 0 \text{ bis } \pi$$

$$m^x = \int_{\beta=0}^{\beta=\pi} m\,n\,dw = \frac{nm_0}{2}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\int_0^\pi \cos\beta\sin\beta\,d\beta + \frac{nm_0 h}{2p^2}\int_0^\pi \sin^3\beta\,d\beta$$

$$\cos\beta\,d\cos\beta \qquad (1-\cos^2\beta)\,d\cos\beta$$

$$-\frac{\cos^2\beta}{2}\Big|_0^\pi = 0$$

$$m^x = \frac{nm_0 h}{2\,p^2}\left[-\int_0^\pi d\cos\beta + \int_0^\pi \cos^2\beta\,d\cos\beta\right] = +\frac{n\,m_0\,2h}{3\,p^2} \qquad \frac{h}{p^2} = \frac{2m_0 g}{a^2}$$

$$-\cos\beta\Big|_0^\pi = 2 \qquad \frac{\cos^3\beta}{3}\Big|_0^\pi = -\frac{2}{3}$$

$$m^x = \frac{4n m_0^2 g}{3a^2}$$

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\alpha^2}d\alpha = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha$$

s. m. Jahnke-Emde S. 31

semikonvergente Entwicklung für große x nach Riemann-Weber I, 67

$$\int_x^\infty e^{-\alpha^2}d\alpha = e^{-x^2}\sum_{\nu=0}^{\nu=n}(-1)^\nu\frac{(2\nu)!}{\nu!(2x)^{2\nu+1}} = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{(2x^2)^2} - + \cdots\right)$$

$$\Theta(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\frac{1}{2x}\left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1.3}{(2x^2)^2} - \frac{1.3.5}{(2x^2)^3} + - \cdots\right)$$

$$\int_0^x e^{-\alpha^2}d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\Theta(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2x}e^{-x^2} + \frac{1}{4x^3}e^{-x^2} - + \cdots$$

$$\int_0^s e^{-p s^2}ds = \frac{1}{\sqrt{p}}\int_0^{s\sqrt{p}} e^{-\alpha^2}d\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} - \frac{1}{2s\sqrt{p}}e^{-ps^2} + - \cdots$$

$$\int_0^\pi e^{-ps^2}ds = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p}} - \frac{1}{2\pi\sqrt{p}}e^{-p\pi^2} + - \cdots$$

$$\int_0^x e^{-\alpha^2}\alpha^{2n}d\alpha = \frac{2n-1}{2}\int_0^x e^{-\alpha^2}\alpha^{2n-2}d\alpha - \frac{1}{2}x^{2n-1}e^{-x^2}$$

$$d(\alpha^{2n+1}e^{-\alpha^2}) = (2n+1)\alpha^{2n}e^{-\alpha^2}d\alpha - 2\alpha^{2n+2}e^{-\alpha^2}d\alpha$$

$$\int_0^x e^{-\alpha^2}\alpha^{2n+2}d\alpha = \frac{2n+1}{2}\int_0^x e^{-\alpha^2}\alpha^{2n}d\alpha - \frac{1}{2}\alpha^{2n+1}e^{-\alpha^2}\Big|_0^x$$

$$\int_0^\pi e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \int_0^\pi e^{-p\alpha^2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!}\cdots\right)d\alpha = \int_0^\pi e^{-p\alpha^2}d\alpha - \frac{1}{2!}\int_0^\pi e^{-p\alpha^2}\alpha^2 d\alpha$$

$$+ \frac{1}{4!}\int_0^\pi e^{-p\alpha^2}\alpha^4 d\alpha - + \cdots \qquad \int_0^x e^{-\alpha^2}\alpha^2 d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^x e^{-\alpha^2}d\alpha - \frac{1}{2}x e^{-x^2}$$

$$\int_0^\pi e^{-p\alpha^2}\alpha^2 d\alpha = \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\pi\sqrt{p}} e^{-\beta^2}\beta^2 d\beta = p^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi\sqrt{p}} e^{-\beta^2}d\beta - \pi p^{\frac{1}{2}} e^{-p\pi^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2p}\left(\int_0^\pi e^{-p\alpha^2}d\alpha - \pi e^{-p\pi^2}\right)$$

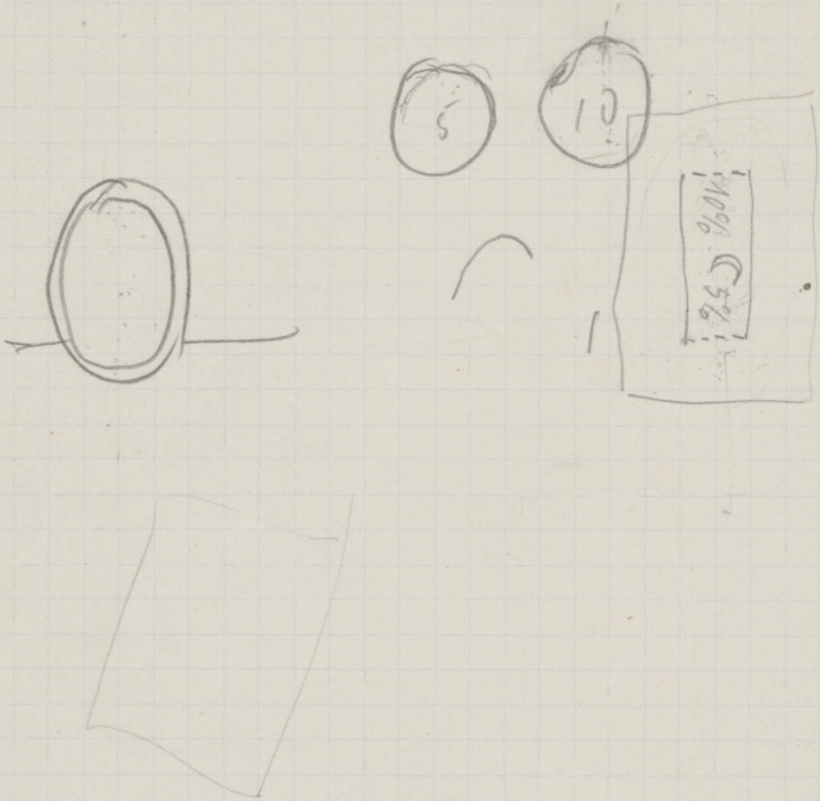
$$\int_0^x e^{-\alpha^2}\alpha^4 d\alpha = \frac{3}{2}\int_0^x e^{-\alpha^2}\alpha^2 d\alpha - \frac{1}{2}x^3 e^{-x^2} = \frac{3}{4}\int_0^x e^{-\alpha^2}d\alpha - \frac{3}{4}x e^{-x^2} - \frac{1}{2}x^3 e^{-x^2}$$

$$\int_0^\pi e^{-p\alpha^2}\alpha^4 d\alpha = p^{-\frac{5}{2}}\int_0^{\pi\sqrt{p}} e^{-\beta^2}\beta^4 d\beta = p^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{4}\int_0^{\pi\sqrt{p}} e^{-\beta^2}d\beta - \frac{3}{4}\pi p^{\frac{1}{2}}e^{-x^2} - \frac{1}{2}p^{\frac{3}{2}}\pi^3 e^{-x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2p^2}\left(\frac{3}{2}\int_0^\pi e^{-p\alpha^2}d\alpha - \frac{3}{2}\pi e^{-p\pi^2} - \frac{1}{2}\pi\, p\pi^2 e^{-p\pi^2}\right)$$

$$\int_0^\pi e^{-p\alpha^2}\cos\alpha\, d\alpha = \left(1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{2p} + \frac{1}{4!}\frac{3}{4p^2}\right)\int_0^\pi e^{-p\alpha^2}d\alpha + \left(\frac{1}{2!}\frac{1}{2p} - \frac{1}{4!}\frac{3}{4p^2}\right)\pi e^{-p\pi^2}$$

$$- \frac{1}{4!}\frac{1}{4p^2}\pi\, p\pi^2 e^{-p\pi^2}$$


5
10
10%
5%

$$(a-b+c)^3=(a^2+b^2+c^2-2ab+2ac-2bc)(a-b+c)=a^3-b^3+c^3+3ab^2+3ac^2-3bc^2$$
$$-3a^2b+3a^2c+3b^2c-6abc$$

$$\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\cos\alpha\sin\alpha\,d\alpha=\frac{1}{2}\int_0^\pi e^{-p^2\alpha^2}\sin 2\alpha\,d\alpha=\cancel{\frac{1}{4}\int_0^\pi e^{-\left(\frac{p}{2}\right)^2(2\alpha)^2}\sin(2\alpha)\,d(2\alpha)}\qquad p\alpha=x,\ 2\alpha=\frac{2x}{p}$$

$$=\frac{1}{2p}\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\frac{2x}{p}\,dx=\frac{1}{2p}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\frac{2x}{p}-\frac{(2x)^3}{3!\,p^3}+\frac{(2x)^5}{5!\,p^5}\right)dx=\frac{1}{4p}\left(\frac{2}{p}-\frac{2^3 2!}{3!\,p^3}+\frac{2^5 3!}{5!\,p^5}\right)$$

$$=\frac{1}{2p^2}-\frac{4}{6p^4}+\frac{16}{40p^6}$$

$$\overline{m}=m_0\frac{\cos\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}\right)+h\cos^2\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{61}{20p^4}\right)+h\sin^2\beta\left(\frac{3}{3p^2}-\frac{30}{20p^4}\right)}{\left(1-\frac{1}{3p^2}+\frac{1}{20p^4}\right)\qquad+h\cos\beta\left(1-\frac{4}{3p^2}+\frac{16}{20p^4}\right)}$$

$$\int_0^{\pi}e^{-p^2\alpha^2}\sin\alpha\,d\alpha=\qquad e^{-p^2}$$

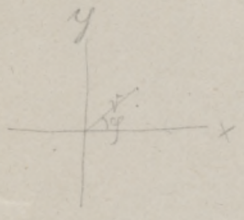
$$\int e^{-p^2\alpha^2}d\alpha\qquad \frac{1}{p^6}$$

Kartes. Koord.: x_i, y_i, z_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ Generalis. Koord.: q_ϱ $(\varrho = 1, 2 \cdots r)$ $r \leqq 3n$

$$x_i = x_i(q_1 \cdots q_r),\quad \delta x_i = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} \frac{\partial x_i}{\partial q_\varrho}\delta q_\varrho,\quad \delta' A = \sum_{i=1}^{i=n}(f_{ix}\delta x_i + f_{iy}\delta y_i + f_{iz}\delta z_i)$$

$$\delta' A = \sum_{i=1}^{i=n} f_{ix} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\frac{\partial x_i}{\partial q_\varrho}\delta q_\varrho + \sum_{i=1}^{i=n} f_{iy}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\frac{\partial y_i}{\partial q_\varrho}\delta q_\varrho + \sum_{i=1}^{i=n} f_{iz}\sum_{\varrho=1}^{\varrho=r}\frac{\partial z_i}{\partial q_\varrho}\delta q_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=r} Q_\varrho \delta q_\varrho$$

$$Q_\varrho = \sum_{i=1}^{i=n}\left(f_{ix}\frac{\partial x_i}{\partial q_\varrho} + f_{iy}\frac{\partial y_i}{\partial q_\varrho} + f_{iz}\frac{\partial z_i}{\partial q_\varrho}\right)$$



$x = r\cos\varphi$ $\quad \delta' A = f_x\delta x + f_y \delta y = f_x \cos\varphi\, \delta r - f_x r \sin\varphi\, \delta\varphi$

$y = r\sin\varphi$ $\quad + f_y \sin\varphi\, \delta r + f_y r\cos\varphi\, \delta\varphi$

$\delta x = \cos\varphi\, \delta r - r\sin\varphi\, \delta\varphi$ $\quad \delta' A = (f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi)\delta r - r(f_x \sin\varphi - f_y\cos\varphi)\delta\varphi$

$\delta y = \sin\varphi\, \delta r + r\cos\varphi\, \delta\varphi$ $\quad Q_r = f_x\cos\varphi + f_y\sin\varphi,\ Q_\varphi = -r(f_x\sin\varphi - f_y\cos\varphi)$

Lagrangesche Gleichg. zweiter Art: $Q_\varrho + \dfrac{\partial T}{\partial q_\varrho} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot q_\varrho}\right) = 0$

$$T = \frac{\mu}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{\mu}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2),\quad Q_r + \mu r\dot\varphi^2 - \frac{d}{dt}(\mu\dot r) = 0,\quad Q_\varphi - \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot\varphi) = 0$$

$$Q_\varrho = -\frac{\partial V}{\partial q_\varrho} - \varepsilon\mathfrak{E}_\varrho,\ V = -\frac{\varepsilon^2}{r},\quad Q_r = \frac{\varepsilon^2}{r^2} - \varepsilon\mathfrak{E}_r,\ Q_\varphi = -\varepsilon\mathfrak{E}_\varphi,\quad \mu\dot r = \varrho,\ \mu r^2\dot\varphi = \psi,\ \mu r\dot\varphi^2 = \frac{\psi^2}{\mu r^3}$$

$$2)\ -\frac{d\varrho}{dt} = -\frac{\psi^2}{\mu r^3} - \frac{\varepsilon^2}{r^2} + \varepsilon\mathfrak{E}_r,\quad 1)\ \mu\frac{dr}{dt} = \varrho,\quad 4)\ -\frac{d\psi}{dt} = +\varepsilon\mathfrak{E}_\varphi,\quad 3)\ \mu\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\psi}{r^2}$$

$$r = a + R,\ \varrho = 0 + P,\ \varphi = \alpha + \omega t + \Phi,\ \psi = f + \Psi,\ f = \mu a^2\omega,\quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\left(1 - 2\frac{R}{a}\right) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2}\frac{2R}{a}$$

$$\frac{\psi}{r^2} = \frac{f + \Psi}{a^2 + 2aR} = \frac{f+\Psi}{a^2}\left(1 - 2\frac{R}{a}\right) = \frac{f}{a^2} + \frac{f}{a^2}\left[\frac{\Psi}{f} - 2\frac{R}{a}\right],\quad \frac{\psi^2}{r^3} = \frac{f^2 + 2f\Psi}{a^3 + 3a^2R} = \frac{f^2 + 2f\Psi}{a^3}\left(1 - 3\frac{R}{a}\right) = \frac{f^2}{a^3} + \frac{f^2}{a^3}\left[2\frac{\Psi}{f} - 3\frac{R}{a}\right]$$

$$\mathfrak{E}_r = \mathfrak{E}_x\cos\varphi + \mathfrak{E}_y\sin\varphi = \mathfrak{E}_x\cos(\alpha + \omega t) + \mathfrak{E}_y\sin(\alpha+\omega t) \qquad \mathfrak{E}_x = Pe^{ist}$$

$$\mathfrak{E}_\varphi = -r\mathfrak{E}_x\sin\varphi + r\mathfrak{E}_y\cos\varphi = -r\mathfrak{E}_x\sin(\alpha+\omega t) + r\mathfrak{E}_y\cos(\alpha + \omega t) \qquad \mathfrak{E}_y = Qe^{ist}$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2},\ \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{-ie^{i\varphi} + ie^{-i\varphi}}{2} \qquad P + iQ = p,\ P - iQ = q$$

$$\mathfrak{E}_r = \frac{1}{2}\left\{Pe^{i(\alpha+\omega t)}e^{ist} - iQe^{i(\alpha+\omega t)}e^{ist}\right\} + \frac{1}{2}\left\{Pe^{-i(\alpha+\omega t)}e^{ist} + iQe^{-i(\alpha+\omega t)}e^{ist}\right\}$$

$$\mathfrak{E}_r = \frac{1}{2}\left\{qe^{i\alpha}e^{i(s+\omega)t} + pe^{-i\alpha}e^{i(s-\omega)t}\right\},\quad \mathfrak{E}_\varphi = \frac{r i}{2}\left\{qe^{i\alpha}e^{i(s+\omega)t} - pe^{-i\alpha}e^{i(s-\omega)t}\right\}$$

$$1)\ \mu\frac{dR}{dt} = P,\quad 2)\ -\frac{dP}{dt} = -\frac{f^2}{\mu a^3}\left(1 + 2\frac{\Psi}{f} - 3\frac{R}{a}\right) - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\left(1 - 2\frac{R}{a}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\left\{qe^{i\alpha}e^{i(s+\omega)t} + pe^{-i\alpha}e^{i(s-\omega)t}\right\}$$

$$3)\ \mu\omega + \mu\frac{d\Phi}{dt} = \frac{f}{a^2}\left(1 + \frac{\Psi}{f} - 2\frac{R}{a}\right),\quad 4)\ -\frac{d\Psi}{dt} = \frac{i\varepsilon a}{2}\left\{qe^{i\alpha}e^{i(s+\omega)t} - pe^{-i\alpha}e^{i(s-\omega)t}\right\}$$

$$1)\ \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\left(\frac{R}{a}\right) = \frac{P}{\mu a\omega},\quad \frac{f^2}{\mu a^3} = \frac{\mu^2a^4\omega^2}{\mu a^3} = \mu a\omega^2,\quad -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\mu a\omega}\right) = -1 - 2\frac{\Psi}{f} + 3\frac{R}{a} - \frac{\frac{\varepsilon^2}{a^2}}{\mu\omega^2 a}\left(1 - 2\frac{R}{a}\right) + \frac{\varepsilon}{2\mu a\omega^2}\{+\}$$

$$-\mu\omega^2 a = \frac{\varepsilon^2}{a^2},\quad 2)\ -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\mu a\omega}\right) = \frac{R}{a} - 2\frac{\Psi}{f} + \frac{\varepsilon}{2\mu a\omega^2}\{+\},\quad \frac{f}{a^2} = \frac{\mu a^2\omega}{a^2} = \mu\omega,\quad 3)\ \frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\Phi = \frac{\Psi}{f} - 2\frac{R}{a}$$

$$4)\ -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dt}\left(\frac{\Psi}{f}\right) = \frac{i\varepsilon}{2\mu a\omega^2}\{-\},\quad \frac{R}{a} = Ae^{i(s+\omega)t},\ \Phi = Be^{i(s+\omega)t},\ \frac{P}{\mu a\omega} = Ce^{i(s+\omega)t},\ \frac{\Psi}{f} = De^{i(s+\omega)t}$$

$$1)\ i\frac{s+\omega}{\omega}A = C,\quad 2)\ -i\frac{s+\omega}{\omega}C = A - 2D + \frac{\varepsilon}{2\mu a\omega^2}qe^{i\alpha},\quad 3)\ i\frac{s+\omega}{\omega}B = D - 2A,\quad 4)\ -i\frac{s+\omega}{\omega}D = i\frac{\varepsilon}{2\mu a\omega^2}qe^{i\alpha}$$

$$-D = \frac{\omega}{s+\omega}\frac{\varepsilon}{2\mu a\omega^2}qe^{i\alpha}$$

$$\left(\frac{s+\omega}{\omega}\right)^2 A = A + \left(2\frac{\omega}{s+\omega} + 1\right)\frac{\varepsilon}{2\mu a\omega^2}qe^{i\alpha},\quad B = \frac{1}{\frac{s}{\omega}+1}i(-D + 2A)$$

$$A = \frac{\frac{2}{\frac{s}{\omega}+1} + 1}{\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^2 - 1}\frac{\varepsilon qe^{i\alpha}}{2\mu a\omega^2},\quad -D + 2A = \frac{\varepsilon qe^{i\alpha}}{2\mu a\omega^2}\left(\frac{\frac{4}{\frac{s}{\omega}+1} + 2}{\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^2 - 1} + \frac{1}{\frac{s}{\omega}+1}\right),\quad B = i\left(\frac{\frac{2}{\frac{s}{\omega}+1} + \frac{4}{\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^2}}{\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^2 - 1} + \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^2}\right)\frac{\varepsilon qe^{i\alpha}}{2\mu a\omega^2}$$

$$A = \frac{\varepsilon q e^{i\alpha}}{2\mu a\omega^2}\,\frac{3+\frac{s}{\omega}}{\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^3-\left(\frac{s}{\omega}+1\right)},\quad B = i\frac{\varepsilon q e^{i\alpha}}{2\mu a\omega^2}\,\frac{2\left(\frac{s}{\omega}+1\right)+4+\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^2-1}{\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^4-\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^2} = i\frac{\varepsilon q e^{i\alpha}}{2\mu a\omega^2}\,\frac{3+2\left(\frac{s}{\omega}+1\right)+\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^2}{\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^4-\left(\frac{s}{\omega}+1\right)^2}$$

$$\mathfrak{M}_x = -\varepsilon x = -\varepsilon r\cos\varphi = -\varepsilon(a+R)\cos(\alpha+\omega t+\bar\Phi),\quad \cos(\varphi_0+\bar\Phi) = \cos\varphi_0 - \bar\Phi\sin\varphi_0$$

$$\mathfrak{M}_x = -\varepsilon\left[a\cos(\alpha+\omega t)+R\cos(\alpha+\omega t)-a\bar\Phi\sin(\alpha+\omega t)\right] = \mathfrak{M}_x^0 - \varepsilon a\left[\frac{R}{a}\cos(\alpha+\omega t)-\bar\Phi\sin(\alpha+\omega t)\right]$$

$$\mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_y^0 - \varepsilon a\left[\frac{R}{a}\sin(\alpha+\omega t)+\bar\Phi\cos(\alpha+\omega t)\right]$$

$$\frac{R}{a} = A' e^{i(s-\omega)t},\quad \bar\Phi = B' e^{i(s-\omega)t},\quad \frac{P}{\mu a\omega} = \mathcal{C}' e^{i(s-\omega)t},\quad \frac{\Psi}{f} = D' e^{i(s-\omega)t}$$

1) $i\frac{s-\omega}{\omega}A' = \mathcal{C}'$ 2) $-i\frac{s-\omega}{\omega}\mathcal{C}' = A' - 2D' + \frac{\varepsilon}{2\mu a\omega^2}p e^{i\alpha}$, 3) $i\frac{s-\omega}{\omega}B' = D' - 2A'$, 4) $-i\frac{s-\omega}{\omega}D' = -i\frac{\varepsilon}{2\mu a\omega^2}p e^{-i\alpha}$

$$D' = \frac{1}{\frac{s}{\omega}-1}\,\frac{\varepsilon p e^{i\alpha}}{2\mu a\omega^2},\quad \left(\frac{s}{\omega}-1\right)^2 A' - A' = \frac{\varepsilon p e^{i\alpha}}{2\mu a\omega^2}\left(1-\frac{2}{\frac{s}{\omega}-1}\right),\quad A' = \frac{\varepsilon p e^{-i\alpha}}{2\mu a\omega^2}\,\frac{\frac{s}{\omega}-3}{\left(\frac{s}{\omega}-1\right)^3-\left(\frac{s}{\omega}-1\right)} = \frac{\varepsilon p e^{-i\alpha}}{2\mu a\omega^2}\,\frac{3-\frac{s}{\omega}}{\left(1-\frac{s}{\omega}\right)^3-\left(1-\frac{s}{\omega}\right)}$$

$$B' = i\frac{1}{\frac{s}{\omega}-1}(2A'-D') = i\frac{\varepsilon p e^{i\alpha}}{2\mu a\omega^2}\,\frac{1}{\frac{s}{\omega}-1}\left(\frac{2-\frac{4}{\frac{s}{\omega}-1}}{\left(\frac{s}{\omega}-1\right)^2-1}-\frac{1}{\frac{s}{\omega}-1}\right) = i\frac{\varepsilon p e^{i\alpha}}{2\mu a\omega^2}\,\frac{3+2\left(\frac{s}{\omega}-1\right)-\left(\frac{s}{\omega}-1\right)^2}{\left(\frac{s}{\omega}-1\right)^4-\left(\frac{s}{\omega}-1\right)^2}$$

$$\mathfrak{M}_x - \mathfrak{M}_x^0 = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{2\mu\omega^2}\Big[\cos(\omega t+\alpha)\,e^{i(\omega t+\alpha)}\,q\,\mathcal{S}_A + \cos(\omega t+\alpha)\,e^{-i(\omega t+\alpha)}\,p\,\mathcal{S}_{A'}$$
$$-i\sin(\omega t+\alpha)\,e^{i(\omega t+\alpha)}\,q\,\mathcal{S}_B + i\sin(\omega t+\alpha)\,e^{-i(\omega t+\alpha)}\,p\,\mathcal{S}_{B'}\Big]$$

$$\frac{n^2-1}{4\pi N} = -\frac{\mu}{3}\frac{e^2}{m\omega^2}\left\{\left[2f(0)+\varphi(0)\right] + \frac{1}{2}\left[2f''(0)+\varphi''(0)\right]\left(\frac{s}{\omega}\right)^2+\cdots\right\}$$

Drude: $n^2 = 1 - \frac{4\pi e^2}{m}\sum \frac{\mathfrak{N}_h}{s^2-s_h^2}$

$f(x)+f(-x) = \sum \frac{C_h}{x^2-x_h^2} = \sum\frac{C_h\omega^2}{s^2-s_h^2}$ Partialbruchzerlegung $s_h = \omega x_h$

für $\varphi(x)$ ist $C_h=1$ und $s_h=\omega\sqrt{\varrho\sigma'}$

$n^2 = 1-\frac{4\pi e^2}{m}\sum\frac{N\mu C_h/3}{s^2-s_h^2}$ $N\mu = \mathfrak{N}_h$ Abweichung gibt $\frac{C_h}{3}$

$+dn_2 = k_1 \varrho n_1, \quad -dn_2 = k_2 n_2, \quad k_1 \varrho n_1 = k_2 n_2 \quad \varrho = \frac{k_2}{k_1}\frac{n_2}{n_1} = \frac{k_2}{k_1} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$

$\cancel{K\,dt} \quad A = k_s \mathcal{E}_0 \quad A = k_s \mathcal{E} + \mathcal{E} k_z \nu$

$k_s \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(k_s + k_z \nu) \quad \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{k_s}{k_s + k_z \nu} = \frac{1}{1 + \frac{k_z}{k_s}\nu}$

$\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} = \frac{1}{2}, \quad \frac{k_z}{k_s}\nu = 1, \quad k_z \nu = k_s$

$-d\mathcal{E} = k_s \mathcal{E}\,dt \quad d\ln\mathcal{E} = -k_s\,dt, \quad \ln\mathcal{E} = -k_s t + \ln\mathcal{E}_0, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-k_s t}$

$-d\mathcal{E}_z = \frac{\mathcal{E}}{N}\nu \quad k_z = \frac{1}{N} \quad \frac{\nu}{N} = \frac{1}{t} \quad k_s = \frac{1}{\tau} \quad \tau = t$

Sommerfeld, Dispersion

$$\frac{n^2-1}{4\pi N} = -\frac{\mu}{3}\frac{e^2}{m\omega^2}\left\{f\left(\frac{s}{\omega}\right) + f\left(-\frac{s}{\omega}\right) + \varphi\left(\frac{s}{\omega}\right)\right\}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2 - \frac{\varrho}{2}(\sigma - \tau - \sigma')}{(x-1)^4 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x^2 - \varrho\sigma'}$$

$$a = -2 - \frac{\varrho}{2}(\sigma - \tau - 2\sigma'), \quad b = -\varrho(\sigma - \tau)$$

$$c = -\frac{\varrho}{2}(2\sigma - \tau) - \left(\frac{\varrho}{4}\right)^2\left[\sigma^2 + 4\sigma'(2\sigma - \tau)\right], \quad \tau' = \sum_1^{\mu'} \frac{e_i'}{e}\frac{1}{(1+\delta_i^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varrho = \frac{e^2}{m a^3 \omega^2}, \quad \sigma = \sum_1^{\mu-1}{}_k \frac{1}{\sin\frac{\pi k}{\mu}}, \quad \tau = \sum_1^{\mu-1}{}_k \sin\frac{\pi k}{\mu} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2\mu}$$

$\sigma' = \sum_1^{\mu'} \frac{e_i'}{e}\frac{1 - 2\delta_i^2}{(1+\delta_i^2)^{\frac{5}{2}}}$, $\delta_i = \frac{d_i}{a}$, d_i Abstand des $i$ten Kerns auf der Ladung e_i von der Ringebene

m Masse, e Ladung des Elektrons, μ Zahl der Elektronen

μ' Zahl der Kerne, a Radius, ω Winkelgeschwindigkeit

$1 + \frac{1}{4}\varrho\sigma = \varrho\tau'$ (Gleichgewichtsbedingung)

2 Kerne

$\delta = \sqrt{\frac{1}{3}}$ (Abstand von Ringebene $\pm a\delta$), weil

Abstoßung: $\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 e^2 / 4a^2\delta^2 = \mu \cdot \frac{\mu}{2} e^2 \delta / a^2(1+\delta^2)^{\frac{3}{2}}$ Anziehung

$\sigma' = 3\sqrt{3}\,\frac{\mu}{32}$, $\tau' = 3\sqrt{3}\,\frac{\mu}{8}$, $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{4}\left(3\sqrt{3}\,\frac{\mu}{2} - \sigma\right)$

H_2 Molekül

$\sigma = \tau = 1$, $\sigma' = \frac{3\sqrt{3}}{16}$, $\varrho = \frac{4}{3\sqrt{3}-1}$

$a = -2 + \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}$, $b = 0$, $c = \frac{4-27\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)^2}$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{(x-1)^4 - \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\right)(x-1)^2 + \frac{4-27\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)^2}},\quad \varphi(x) = \frac{1}{x^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}$$

$f(0) = -3{,}2020$, $\varphi(0) = 3{,}2302$

$f''(0) = -27{,}212$ $\varphi''(0) = -20{,}868$

$$\frac{n^2-1}{4\pi N} = 6{,}4227\,\frac{e^2}{m\omega^2}\left\{1 + 3{,}9077\,\frac{s^2}{\omega^2} + \cdots\right\}$$

$\frac{s}{\omega} = \pm 0{,}41$, $\frac{s}{\omega} = \pm 2{,}41$, $\frac{s}{\omega} = \pm 0{,}56$

$\frac{s}{\omega} = \pm(1+0{,}54i)$, $\frac{s}{\omega} = \pm(1+0{,}54i)$

Heitom

$\delta_i = 0,\ \sigma' = \tau' = 1,\ \sigma = \tau = 0,\ \frac{1}{\varrho} = \mu - \frac{\sigma}{4} = 1$

$a = -1,\ b = 0,\ c = 0$

$f(x) = \frac{(x-2)^2 + \frac{1}{2}}{(x-1)^4 - (x-1)^2},\ g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

<u>Hertom</u>

$\sigma = \tau = 1,\ \sigma' = \tau' = 2,\ \varrho = \frac{4}{7},\ a = -\frac{6}{7},\ b = 0,\ c = -\frac{23}{49}$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2 + 4/7}{(x-1)^4 - 6/7\,(x-1)^2 - 23/49},\ g(x) = \frac{1}{x^2 - 8/7}$$

$$f(0) = -14,\ g(0) = -7/8,\ f''(0) = -\frac{325 \cdot 49}{8},\ g''(0) = -\frac{49}{32}$$

$$\frac{n^2-1}{4\pi N} = \frac{77}{4}\frac{e^2}{m\omega^2}\left\{1 + \frac{21 \cdot 289}{88}\frac{s^2}{\omega^2} + \dots\right\}$$

Absorptionslinien: Wurzeln des Nenners von $f(x) = 0$

$f(-x) = 0,\ g(x) = 0$

$$\frac{s}{\omega} = \pm 1 \pm \sqrt{\frac{4\sqrt{2} + 3}{7}} = \begin{cases} \pm 2{,}12 \\ \pm 0{,}12 \end{cases},\ \frac{s}{\omega} = \pm 2\sqrt{\frac{2}{7}} = \pm 1{,}07$$

$$\frac{s}{\omega} = \pm 1 \pm i\sqrt{\frac{4\sqrt{2} - 3}{7}} = \pm 1 \pm i\,0{,}615$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - \varepsilon\mathfrak{E}_x,\quad \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}e^{ist},\quad x = p e^{ist},\quad -ms^2p = -a^2p - \varepsilon\mathfrak{E},\quad m\omega^2 = a^2$$

$$p\, m(\omega^2 - s^2) = -\varepsilon\mathfrak{E},\quad x = -\frac{\varepsilon}{m}\frac{1}{\omega^2 - s^2}\mathfrak{E}e^{ist},\quad \mathfrak{M} = N\varepsilon x = \frac{\varepsilon^2 N}{m(\omega^2 - s^2)}\mathfrak{E}e^{ist}$$

$$\frac{4\pi\varepsilon^2 N}{m(\omega^2 - s^2)} = n^2 - 1 \quad s = 2\pi\frac{c}{\lambda},\quad \omega = 2\pi\frac{c}{\lambda_0},\quad \omega^2 - s^2 = 4\pi^2c^2$$

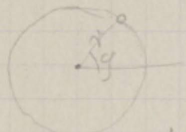
$$n^2 - 1 = \frac{\varrho}{\nu_0^2 - \nu^2},\quad (n - n_0)n_0 = -\frac{\varrho\,\mu}{\nu_0\, 4\mu^2} = -\frac{\varrho}{4\nu_0(\nu - \nu_0)} \quad \varrho = \frac{4\pi\varepsilon^2 N}{m}$$

$$n^2 - n_0^2 = \frac{\varrho}{2\nu_0(\nu_0 - \nu)},\quad (n - n_0)2n_0 = -\frac{\varrho}{2\nu_0(\nu - \nu_0)},\quad n - n_0 = -\frac{\varrho}{4\nu_0(\nu - \nu_0)n_0}$$

1 Punkt in n_0^2

$$\nu = \frac{2\pi c}{\lambda},\quad \nu - \nu_0 = 2\pi c\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda\lambda_0} = \nu_0\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda},\quad n - n_0 = \frac{\varrho\lambda}{4\nu_0^2(\lambda - \lambda_0)n_0}$$

$$n - n_0 = \frac{D}{\lambda - \lambda_0} \quad D = \frac{\varrho\lambda_0}{4\nu_0^2 n_0} = \frac{\varrho\lambda_0^3}{4\cdot 4\pi^2c^2 n_0} = \frac{4\pi\varepsilon^2 N\lambda_0^3}{4\cdot 4\pi^2c^2 n_0 m} = N\frac{\varepsilon^2}{m}\frac{\lambda_0^3}{4\pi c^2 n_0}$$



$$T = \frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi}, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2, \quad T = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\varrho = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \mu\dot{r}, \quad \psi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \mu r^2\dot{\varphi}, \quad H = T + U, \quad U = \frac{e^2}{r}, \quad T = \frac{\varrho^2}{2\mu} + \frac{\psi^2}{2\mu r^2}.$$

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial \varrho}, \quad \dot{\varrho} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \psi}, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2\mu}\left(\varrho^2 + \frac{\psi^2}{r^2}\right) + \frac{e^2}{r}$$

$$\dot{r} = \frac{\varrho}{\mu}, \quad \dot{\varrho} = +\frac{1}{\mu}\frac{\psi^2}{r^3} + \frac{e^2}{r^2} - \mathfrak{F}_r, \quad \dot{\varphi} = \frac{\psi}{\mu r^2}, \quad \dot{\psi} = -r\,\mathfrak{F}_\varphi$$ ([illegible] r^2 [illegible] Definition von a_e)

$$r = a + R, \quad \varrho = P, \quad \varphi = \alpha + \omega t + \Phi, \quad \psi = f + \Psi, \quad \mu a^2\omega = f$$

$$\frac{\psi}{r^2} = \frac{f+\Psi}{(a+R)^2} = \frac{f+\Psi}{a^2\left(1+\frac{2R}{a}\right)} = \frac{f}{a^2} + \frac{\Psi}{a^2} - \frac{f}{a^2}\frac{2R}{a} = \frac{f}{a^2} + \frac{f}{a^2}\left[\frac{\Psi}{f} - 2\frac{R}{a}\right]$$

$$\frac{\psi^2}{r^3} = \frac{f^2+2f\Psi}{a^3+3a^2R} = \frac{f^2+2f\Psi}{a^3\left(1+3\frac{R}{a}\right)} = \frac{f^2}{a^3} + \frac{2f\Psi}{a^3} - \frac{f^2}{a^3}\frac{3R}{a} = \frac{f^2}{a^3} + \frac{f^2}{a^3}\left[\frac{2\Psi}{f} - 3\frac{R}{a}\right]$$

$$U = \frac{\varepsilon^2}{a+R} = \frac{\varepsilon^2}{a}\left(1 - \frac{R}{a}\right) \qquad \frac{dU}{dr} = \frac{dU}{dR} = -\frac{\varepsilon^2}{a^2}$$

$$\mu\omega^2 r = \frac{\varepsilon^2}{a^2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x + \varepsilon\mathfrak{E}_x,\quad \mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}e^{i\nu t},\quad x = be^{i\nu t}$$

$$-mb\nu^2 + a^2b = -\varepsilon\mathfrak{E},\quad bm(\nu_0^2-\nu^2) = -\varepsilon\mathfrak{E},\quad x = \frac{-\varepsilon\mathfrak{E}}{m(\nu_0^2-\nu^2)}e^{i\nu t}$$

$$\mathfrak{m}_x = -\varepsilon N x = \frac{\varepsilon^2 N}{m(\nu_0^2-\nu^2)}\mathfrak{E}e^{i\nu t},\quad n^2-1 = \frac{4\pi\varepsilon^2 N}{m(\nu_0^2-\nu^2)}$$

$$\nu = \frac{2\pi c}{\lambda},\quad \nu_0^2-\nu^2 = 4\pi^2c^2\left(\frac{1}{\lambda_0^2}-\frac{1}{\lambda^2}\right) = 4\pi^2c^2\frac{\lambda^2-\lambda_0^2}{\lambda^2\lambda_0^2}$$

$$n^2 = 1 + \frac{\varepsilon^2 N\lambda_0^2}{m\pi c^2}\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2} = 1 + h_0\frac{\lambda^2}{\lambda^2-\lambda_0^2}$$

Wood (1904) Na-Dampf bei 644°

$\lambda_0 = 0{,}588\,982\,546\,\mu$ $\left(D_1 = 0{,}589\,616\,\mu\right.$

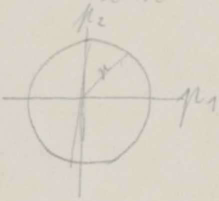
$h_0 = 5{,}376\cdot 10^{-5}$ $\left.D_2 = 0{,}589\,019\,\mu\right)$

nach Goldhammer, Dispers. u. Absorpt. S. 56 (1913)

$S = k \ln W$, $W = \int\cdots\int dq_1 \cdots dp_{3n} = v^n \int_{E}^{E+dE} dp_1 \cdots dp_{3n}$

Kugel $\frac{p_1^2}{2m} + \cdots \frac{p_{3n}^2}{2m} = E$, $p_1^2 + \cdots p_{3n}^2 = 2mE$ Radius $\sqrt{2mE}$

$\int_0^r dp_1\, dp_2$



$p_1^2 + p_2^2 = r^2$

$V = C' r^n$

$C'\left[(r+dr)^n - r^n\right] = C'\left[\frac{dr^n}{dr}\, dr\right] = C' n r^{n-1}\, dr$

r $\int dp_1 \cdots dp_{3n} = \int dp_1 \cdots dp_{3n-1}$ $\quad dV = C\, E^{\frac{3n}{2}-1}\, dE$

$dW = C v^n E^{\frac{3n}{2}-1}\, dE = \Pi\, dE$ $\quad S = k \ln \Pi = k n \ln v + \frac{3n}{2} k \ln E + \text{konst}$

$S = R \ln v + \frac{3}{2} R \ln E + \text{konst} = R \ln v + \frac{3}{2} R \ln T + \text{konst}$

$$\frac{\mathcal{J}}{2} = \frac{e^2}{a}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1^2+0^2}} - \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\right) + \left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} - \frac{1}{\sqrt{3^2+2^2}}\right) + \dots\right]$$

$$= \frac{e^2}{a^2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+(n-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+(n+1)^2}}\right]$$

$$= \frac{e^2}{a}\sum \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+1}} - \frac{1}{\sqrt{1+(1-\frac{1}{n})^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+1}} - \frac{1}{\sqrt{1+(1+\frac{1}{n})^2}}\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2+2\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right), \quad (1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1.3}{2^2 2!}\varepsilon^2 - \frac{1.3.5}{2^3 3!}\varepsilon^3 + \frac{1.3.5.7}{2^4 4!}\varepsilon^4 - +$$

$$\frac{\mathcal{J}}{2} = \frac{e^2}{a}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\frac{1}{n}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + 1 - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{e^2}{a}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\left[1 - (1+\varepsilon_1)^{-\frac{1}{2}} + 1 - (1+\varepsilon_2)^{-\frac{1}{2}}\right]\frac{1}{n}$$

$$\frac{\mathcal{J}}{2} = \frac{e^2}{a}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\frac{1}{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\varepsilon_1 - \frac{1.3}{2^2 2!}\varepsilon_1^2 + \frac{1.3.5}{2^3 3!}\varepsilon_1^3 - \frac{1.3.5.7}{2^4 4!}\varepsilon_1^4 + - \\ + \frac{1}{2}\varepsilon_2 - \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \frac{1}{n^2}, \ \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = 2\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^4}, \ \varepsilon_1^3 + \varepsilon_2^3 = 3\frac{1}{n^4}, \ \varepsilon_1^4 + \varepsilon_2^4 = 2\frac{1}{n^4}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\mathcal{J}}{2} = \frac{e^2}{a}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1.3}{2^2 2!}2\frac{1}{n^2} - \frac{1.3}{2^2 2!}\frac{1}{2}\frac{1}{n^4} + \frac{1.3.5}{2^3 3!}3\frac{1}{n^4} - \frac{1.3.5.7}{2^4 4!}2\frac{1}{n^4}\right)$$

$$= \frac{e^2}{a}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{n^4}\left(\frac{3}{16} - \frac{15}{16} + \frac{35}{64}\right)\right] = \frac{e^2}{a}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum\frac{1}{n^3}\left(-\frac{1}{4} + \frac{13}{64}\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\mathcal{J} = -\frac{e^2}{a}\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^3}\left(1 - \frac{13}{16}\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{e^2}{a}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^3} - \frac{13}{16}\sum_{n=1}\frac{1}{n^5}\right]$$

$n=1$ $\frac{\mathcal{J}}{2} = \frac{e^2}{a}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ $\begin{array}{r}-1,4472\\-1,4142\\\hline 0,0330\end{array} = -0,0330$

$n=2$ $\frac{\mathcal{J}}{2} = \frac{e^2}{a}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ $\begin{array}{r}-0,4472\\-0,2774\\\hline -0,7246\\+0,7071\\\hline 0,0175\end{array} = 0,0175$

$n=3$ $\frac{\mathcal{J}}{2} = \frac{e^2}{a}\left(\frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{25}}\right)$ $\begin{array}{r}-0,2774\\-0,2000\\\hline 0,4774\\-0,4714\\\hline 0,0060\end{array} = 0,0060$

$\frac{1}{n^3} = \frac{1}{27}, \frac{13}{16.9}$ $\begin{array}{r}1,0000\\0,0903\\\hline 0,9097\end{array}$ $\begin{array}{r}0,9589-1\\-1,4314\\\hline 0,5275-2\\-0,75255\\\hline 0,47495-3\end{array}$ $(= 0,005957)$

$\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $\frac{13}{16.4}$ $\begin{array}{r}1,1139\\-1,8062\\\hline 0,3077\end{array}$ -1 $\begin{array}{r}1,0000\\-0,2031\\\hline 0,7969\end{array}$ $\begin{array}{r}0,9014-1\\-0,9031\\\hline 0,9983-2\\-0,75255\\\hline 0,24575-2\end{array}$ $(= 0,01761)$

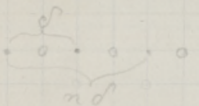
$n=4$ $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{64}$ $\frac{13}{16.16}$ $\begin{array}{r}1,0000\\-0,0508\\\hline 0,9492\end{array}$ $\begin{array}{r}0,9774-1\\-1,8062\\\hline 0,1712-2\\-0,75255\\\hline 0,41865-3\end{array}$ $0,01483$ $\quad 0,0026$

$\sqrt{2} = 1,4142$ $\lg\sqrt{32} = 0,75255$

$\frac{1}{\sqrt{5}} = \begin{array}{r}0,0000\\-0,34945\\\hline 0,65055-1\end{array} = 0,4472$

$\frac{1}{\sqrt{13}} = \begin{array}{r}0,0000\\0,55695\\\hline 0,44305-1\end{array} = 0,2774$

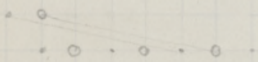
$\begin{array}{r}\lg 13 = 1,1139\\-\lg 16 = 1,2041\\\hline 0,9098-1\end{array}$ $\frac{13}{16} = 0,8124$



$$\varphi = \frac{e^2}{n\delta} - \frac{e^2}{(n+1)\delta} + \frac{e^2}{n\delta} - \frac{e^2}{(n-1)\delta} = \frac{e^2}{\delta}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) = \frac{e^2}{\delta}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n-1)}\right)$$

$$\varphi = \frac{e^2}{\delta}\,\frac{n(n-1)-n(n+1)}{n^2(n+1)(n-1)} = \frac{e^2}{\delta}\,\frac{n^2-n-n^2-n}{n^2(n^2-1)} = -\frac{e^2}{\delta}\,\frac{2}{n(n^2-1)} = -\frac{e^2}{\delta}\,\frac{2}{n^3}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n^2}} = -\frac{e^2}{\delta}\,\frac{2}{n^3}\left(1+\frac{1}{n^2}-\dots\right)$$

$$\varphi = -\frac{e^2}{\delta}\,2\left(\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^3} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^5}\dots\right)$$

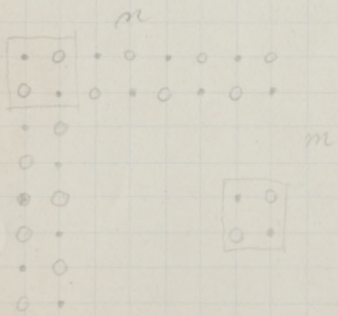


$$\varphi = \frac{e^2}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{(2n-1)^2+1^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2n-2)^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)^2+1^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+1^2}}\right) = \frac{e^2}{a}\Big($$

$$[(2n-1)^2+1]^{-\frac12} = \frac{1}{2n}\left[\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2+\left(\frac{1}{2n}\right)^2\right]^{-\frac12} = \frac{1}{2n}\left[1-\frac{1}{n}+2\left(\frac{1}{2n}\right)^2\right]^{-\frac12} = \left(1-\frac{1}{n}+\frac{4}{4n^2}\right)^{-\frac12}$$

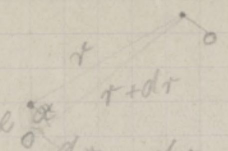
$$[(2n\pm2)^2+1]^{-\frac12} = \frac{1}{2n}\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{2n}\right)^2\right]^{-\frac12} = \frac{1}{2n}\left[1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{4n^2}\right]^{-\frac12} = \left(1-\frac{2}{n}+\frac{5}{4n^2}\right)^{-\frac12}$$

$$[(2n)^2+1]^{-\frac12} = \frac{1}{2n}\left[1+\frac{1}{4n^2}\right]^{-\frac12} = \left(1-0+\frac{1}{4n^2}\right)^{-\frac12}$$



$$\varphi = \frac{e^2}{a}\Bigg[\frac{1}{\sqrt{(2n)^2+(2m)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^2+(2m)^2}} \mp \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+(2m+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+(2m)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2n-1)^2+(2m)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+(2m+1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)^2+(2m+1)^2}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+(2m)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2n-1)^2+(2m)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+(2m-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)^2+(2m-1)^2}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+(2m)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^2+(2m)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2n)^2+(2m-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(2n+1)^2+(2m-1)^2}}$$

0 0	+1 0	0 +1	+1 +1	0 0	0 +1	0 -1	+1 +1	a a	a b	a c	a d	a = 0
0 0	-1 0	0 +1	-1 +1	0 +1	0 0	+1 -1		b a	b b	b c	b d	b = +1
0 0	-1 0	0 -1	-1 -1	0 -1	-1 +1	0 0		c a	c b	c c	c d	c = -1
0 0	+1 0	0 -1	+1 -1	-1 -1	0 -1	0 +1	0 0	d a	d b	d c	d d	d = 0
0 0	0 +1	0 -1	0 0									
+1 0												



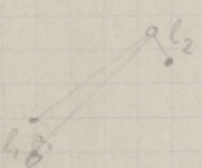
$$\varphi = e^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+dr}\right) = \frac{e^2\,dr}{r^2 + r\,dr} = \frac{e^2}{r^2}\,\frac{dr}{1+\frac{dr}{r}}$$

$dr = l\cos\alpha$

$$\varphi = \frac{e^2}{r^2}\,dr = \frac{e^2 l\cos\alpha}{r^2} = \frac{e\,m}{r^2}\cos\alpha$$

$$\varphi = \frac{e\,m}{r^2}\cos\alpha - \frac{e\,m}{(r+dr)^2}\cos\beta$$

$$= e\,m_1\left(\frac{\cos\alpha}{r^2} - \frac{\cos\beta}{(r+dr)^2}\right)$$



$\varphi_1 =$

Potential im Außenraum eines unendl. Halbgitters v_1, v_2 in der Fläche $b_1 = \frac{[v_2 v_3]}{|v_1 v_2 v_3|}$

$$q_{lm} = l\frac{(b_1 b_3)}{b_3^2} + m\frac{(b_2 b_3)}{b_3^2}$$

$$A = \frac{b_1^2}{b_3^2} - \frac{(b_1 b_3)^2}{b_3^4}$$

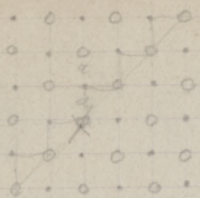
$$B = \frac{b_2^2}{b_3^2} - \frac{(b_2 b_3)^2}{b_3^4}$$

$$p_{lm} = \sqrt{Al^2 + Bm^2 + 2Clm}$$

$$C = \frac{(b_1 b_2)}{b_3^2} - \frac{(b_1 b_3)(b_2 b_3)}{b_3^4}$$

$$\varphi = \frac{|b_3|}{b_3^2}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_k e_k \cos 2l\pi(r_k - r_1, b_1)\cos 2m\pi(r_k - r_1, b_2)$$

$$\frac{e^{-2\pi p_{lm}(r_k - r_1, b_3)}\left[\cos 2\pi q_{lm}(r_k - r_1, b_3) - e^{-2\pi p_{lm}}\cos 2\pi q_{lm}(r_k - r_1, b_3)\right]}{\left(1 - 2e^{-2\pi p_{lm}}\cos 2\pi q_{lm} + e^{-4\pi p_{lm}}\right)p_{lm}}$$



$$v = -\frac{e^2}{a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots\right) = -\frac{e^2}{a}\,2\ln 2$$

$$\cancel{v = -\frac{e^2}{a}\left[1-2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{10}}-\cdots\right]\right.}$$

$$\cancel{\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\pm 1}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}+\frac{1}{\sqrt{1+2^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+3^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+4^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+5^2}}-\frac{1}{\sqrt{1+6^2}}}$$

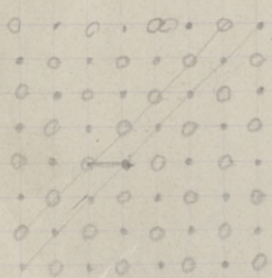
$$v = -\frac{e^2}{a}\,2\ln 2 = -\frac{e^2}{a}\,2{,}767 \qquad \delta = 2a$$

$$-\frac{e^2}{a}\left(\frac{8K_0(\pi)-1}{2}+1\right) = -\frac{e^2}{a}\left(4K_0(\pi)+\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{e^2}{a}\left(\frac{8K_0(\pi)-1}{2}+\right.$$

699012 3010
1,4143 0,3495 1505 0,4072 4139
1 0,6005−1 0,6495−1 −0,3995 0,5685
−1,000 −0,1140
−0,3995 0,1947
0,0148

0,0148



$$\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}-\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}-\frac{1}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2}}-\frac{1}{\sqrt{3^2+2^2}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2}}-\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{13}}-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}}-\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+n^2}}+\frac{1}{\sqrt{(n-1)^2+n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{}}$$

$$\frac{1}{n}\sqrt{2}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}\right)$$

$$\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right]\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\right] = 1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^2$$

$$= 1+1+\frac{2}{n^2}+1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}$$

$$= 3+\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{3+\frac{1}{n^4}}} \qquad \left(\frac{1}{n^2}\pm\frac{2}{n}\right)=\varepsilon \qquad \left(\frac{1}{n}\pm\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\right)^2=\frac{1}{n^2}\pm\frac{1}{n^3}+\frac{1}{4}\frac{1}{n^4}$$

$$\left[\frac{1}{n}\left(1\pm\frac{1}{2n}\right)\right]^3=\frac{1}{n^3}\pm\frac{3}{2}\frac{1}{n^4}+\frac{3}{4}\frac{1}{n^5}\pm\frac{1}{8n^6}$$

$$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\varepsilon-\frac{1}{8}\varepsilon^2+\frac{1}{16}\varepsilon^3- \qquad \left[\frac{1}{n}\left(-1+\frac{1}{2n}\right)\right]^2=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{4}\frac{1}{n^4}$$

$$(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2-\frac{1.3.5}{2^3\,3!}\varepsilon^3+\frac{1.3.5.7}{2^4\,4!}\varepsilon^4$$

$$1-\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2-\frac{5}{16}\varepsilon^3+\frac{35}{128}\varepsilon^4 \qquad \left[\frac{1}{n}\left(-1+\frac{1}{2n}\right)\right]^3$$

$$=-\frac{1}{n^3}+\frac{3}{2}\frac{1}{n^4}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}:\ 1-\frac{1}{2}\frac{1}{n}-\frac{2}{8}\frac{1}{n^2}$$

$$+\frac{3}{8}\frac{1}{n^2}+\frac{3}{16}\frac{1}{n^3}+\frac{12}{128}\frac{1}{n^4}$$

$$\mp\frac{5}{16}\frac{1}{n^3}-\frac{120}{128}\frac{1}{n^4}$$

$$+\frac{35}{128}\frac{1}{n^4}$$

$$1-\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{1}{8}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{16}\frac{1}{n^3}-\frac{13}{128}\frac{1}{n^4}$$

$$\varepsilon=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\right):\ 1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}-\frac{1}{4}n^2$$

$$+\frac{3}{8}n^2-\frac{3}{8}\frac{1}{n^3}+\frac{3}{32}\frac{1}{n^4}$$

$$+\frac{5}{16}\frac{1}{n^3}-\frac{15}{32}\frac{1}{n^4}$$

$$+\frac{35}{128}\frac{1}{n^4}$$

$$1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\frac{1}{8}n^2-\frac{1}{16}\frac{1}{n^3}-\frac{13}{128}\frac{1}{n^4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(2+\frac{1}{4}\frac{1}{n^2}-\frac{13}{64}\frac{1}{n^4}+\cdots\right)$$

$$\varphi=\frac{1}{n}\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}-\frac{\frac{1}{4}\frac{1}{n^2}+\frac{3}{64}\frac{1}{n^4}}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{1}{n^3}\left(1-\frac{3}{16}\frac{1}{n^2}\right)$$

$$n=2 \quad \varphi=\frac{1}{32\sqrt{2}}$$

$$\varphi = -\frac{ae^2}{\delta} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n}\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}} b_{11} + \sum_{-\infty}^{+\infty} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}}\right]$$

$$\varphi = -\frac{ae^2}{\delta} + \frac{b}{\delta^n} \quad b = 2^n\left[\sum_{-\infty}^{+\infty} (l_1^2+l_2^2+l_3^2)^{-\frac{n}{2}} + b_{12}\sum_{-\infty}^{+\infty} (l_1^2+l_2^2+l_3^2)\right]$$

$$\varphi = -\frac{ae^2}{\delta}\left(1+\frac{1}{n}\right), \; b = 2^n b_0 (S_g + S_u), \; \frac{b}{\delta^{n-1}}$$

$$\cancel{b_0 = 2^n \frac{b}{S}}$$

$$\varphi = -\frac{\alpha e^2}{\delta} + \frac{\beta}{\delta^n} = -\frac{\alpha e^2}{\delta} + \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n}\left[b_{11}\sum_{l_1=1}^{+\infty} (l_1^2+l_2^2+l_3^2)^{-\frac{n}{2}}\right]$$

$$b = \frac{1}{2^n}(b_{11} S_g + b_{12} S_u) = (b_{22} S_g + b_{12} S_u)\frac{1}{2^n}$$

$$b_{11} S_g + b_{12} S_u = b_{22} S_g + b_{12} S_u, \; b_{11} = b_{22}$$

$$b_{11}$$

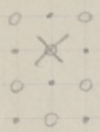
$$\varphi = -\frac{\alpha e^2}{\delta} + \frac{2^n}{\delta^n} b_0 (\sigma_g + \sigma_u), \; \beta = 2^n b_0 (\sigma_g + \sigma_u)$$

$$\frac{b}{\delta^n} = \frac{a}{n}\frac{e^2}{\delta}, \; b = 2^n b_0 (S_g + S_u), \; \beta = b\frac{\sigma}{S}$$

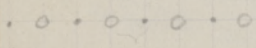
$$\varphi = -\frac{\alpha e^2}{\delta} + \frac{b}{\delta^n}\frac{\sigma}{S} = -\frac{e^2 a}{\delta}\frac{\alpha}{a} + \frac{e^2}{\delta}\frac{a}{n}\frac{\sigma}{S} = -\frac{e^2}{\delta}\left(\alpha - \frac{a}{n}\frac{\sigma}{S}\right)$$

$$\varphi = -\frac{ae^2}{\delta}\left(\frac{\alpha}{a} - \frac{1}{n}\frac{\sigma}{S}\right)$$

$\Phi =$



$$\varphi = -\frac{a}{\delta} + \frac{b}{\delta^n}$$



$$\varphi = 2\frac{e^2}{a}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{e^2}{r} 2\ln 2$$

$\alpha =$ $$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{e^2}{r^2} 2\ln 2 = \frac{b}{r^{n+1}},\quad -\frac{e^2}{r} a = n\frac{b}{r^{n+1}},\quad b = -e^2 r^n \frac{a}{n}$$

$$\varphi = -\frac{e^2}{r}a + \frac{b}{r^n} = -\frac{e^2}{r}$$

$$\varphi = -\frac{a}{\delta} + \frac{b}{\delta^n},\quad \frac{d\varphi}{d\delta} = \frac{a}{\delta^2} - n\frac{b}{\delta^{n+1}},\quad \frac{a}{\delta^2} = n\frac{b}{\delta^{n+1}},\quad \frac{b}{\delta^n} = \frac{1}{n}\frac{a}{\delta^3}$$

$$\varphi = -\frac{a}{\delta} + \frac{1}{n}\frac{a}{\delta^3}$$

$$\Phi = \frac{N}{2}\left(-\frac{ae^2}{\delta} + \frac{b}{\delta^n}\right),\quad \frac{d\Phi}{d\delta} = 0 = \frac{N}{2}\left(\frac{ae^2}{\delta^2} - n\frac{b}{\delta^{n+1}}\right)$$

$$\frac{ae^2}{\delta^2} = n\frac{b}{\delta^{n+1}},\quad \frac{b}{\delta^n} = \frac{a}{n}\frac{e^2}{\delta},\quad \varphi = \frac{\Phi}{\frac{N}{2}} = -\frac{ae^2}{\delta}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\varphi = \sum \pm \frac{e^2}{r} + \sum \frac{b_{11}}{r_{op}^n} + \sum \frac{b_{12}}{r_{oq}^n}$$

$r_{op}^2 = \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)$ $\quad l_1 + l_2 + l_3$ [illegible] $\quad r_{op}^n = \left(\frac{\delta}{2}\right)^n (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{\frac{n}{2}}$

$$\sum \frac{b_{11}}{r_{op}^n} = b_{11} \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} \sum_{l\ \text{[illegible]}}^{-\infty+\infty} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\sum_n^N \frac{\mu_n}{n} \quad (+ - + - + -)$$

c

$$-\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

N

$$n_i \quad \varepsilon_i \quad \sum n_i \varepsilon_i e^{-\varepsilon_i k}$$

g. t.

N

$$\varepsilon_i < \varepsilon_{i+1}$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \lg 2$$

$$\sum c n_i e^{-\varepsilon_i k} = 1 \quad c n_i e^{-\varepsilon_i k} = w_i$$

$$c \sum n_i = 1 \quad c = \frac{1}{\sum n_i}$$

$$n_1 e^{-\varepsilon_1 k} + n_2 e^{-\varepsilon_2 k} + \cdots$$

$\frac{1}{}$

$+ - + -$

ε_1

$$\sum n_1 \varepsilon_i e^{-k\varepsilon_i}$$

$\cancel{1+0\cdot 2^1+1\cdot 2^2}$

$0,010111\ldots$

$0+\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}$

2^{p+1} $\quad n < 2^p$ $\quad = p_1\, p_2$

$n-2^p = n_1$

$\cancel{+ + + - - -}$

$\cancel{+ - -}$

$\cancel{+ + -}$

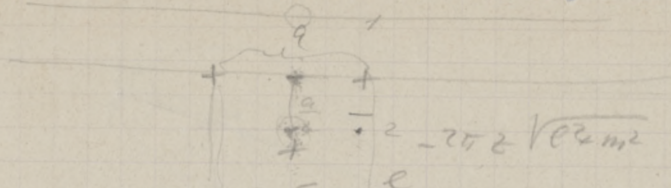
$$\begin{matrix} + & + & - & - \\ + & - & + & - \\ + & - & - & + \\ - & + & - & + \\ - & - & + & + \end{matrix} \qquad A\ + + - - \qquad 4!$$

$$\left| + - + - + - + - \right|$$

$$\left| + + - - + - + - \right|$$

$$\left| + \right.$$

$$\left| \begin{matrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{matrix} \right. \qquad \left| \begin{matrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right| = \qquad a_1$$

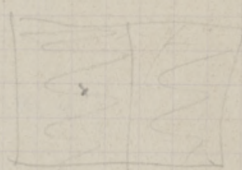


$$\varphi = -16\pi^2 \sum \frac{e^{-2\pi z\sqrt{l^2+m^2}}}{\sqrt{l^2+m^2}} \cos\pi m \cos\pi n$$

$+0{,}133$
$-0{,}001$

$$\frac{4\cdot\frac{e^2}{a}\,0{,}132}{a^2}$$

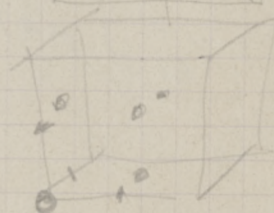
$$\frac{2\lg 2}{\frac{a}{2}}$$



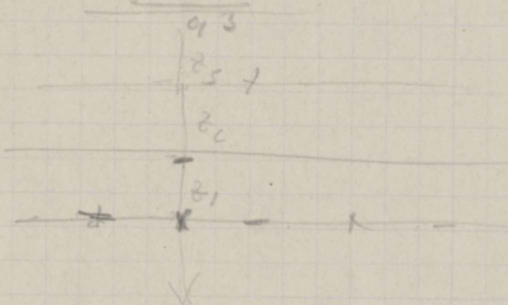
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22} + \mathcal{E}_{12} + \mathcal{E}_{21}$$

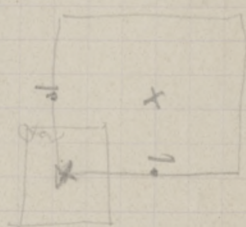
$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22}$$

$$\frac{1}{2}(\mathcal{E}-\mathcal{E}') = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_{12}+\mathcal{E}_{21}) = \mathcal{E}_{12}$$



$$\frac{0{,}528\, e^2}{a^3}$$





$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{2} = +16\pi^2\, 2\pi \sum e^{-2\pi z_1\sqrt{l^2+m^2}} \cos$$

$+\ \ -\ \ +\ \ -$

$-2\lg 2$

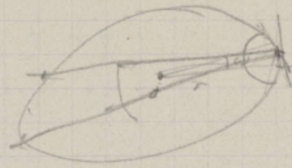
$+\ +\ -\ -\ \underset{0}{+}\ +\ -\ -\ +\ +$

$1 - \frac{1}{2} - \ \ + \frac{1}{4} + \ \ - \frac{1}{6} - \ \ + \frac{1}{8}$

$-1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ \ - \frac{1}{6} + \ \ +$

$$= -1\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\right) = -\lg 2$$

$\varphi = \iint f(r)\, dv\, dv'$



$\int f(r)\, dv$

$= \int_0^R f(r)\, r^2\, dr\, d\omega$

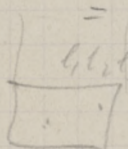
$= \underline{\underline{V \psi(0)}} - \int \psi(R(\omega))\, d\omega$

$\underline{\int f(r)\, r^2\, dr} = \psi(0)$

$d\omega = \frac{d\sigma \cos(-)}{R^2}$

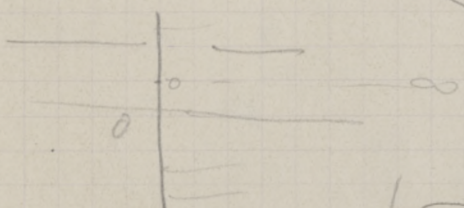
$\int \psi(R)\, d\omega\, dv'$

$= \int \psi(R)\, \underline{d\omega'\, \underline{d\sigma}}\, dR = F\, 2\pi \cdot \underline{\psi(0)}$



$\int \underline{\psi(R)} \frac{\cos(n(r)) \cos(n'(r))}{r^2}\, d\sigma\, d\sigma'$

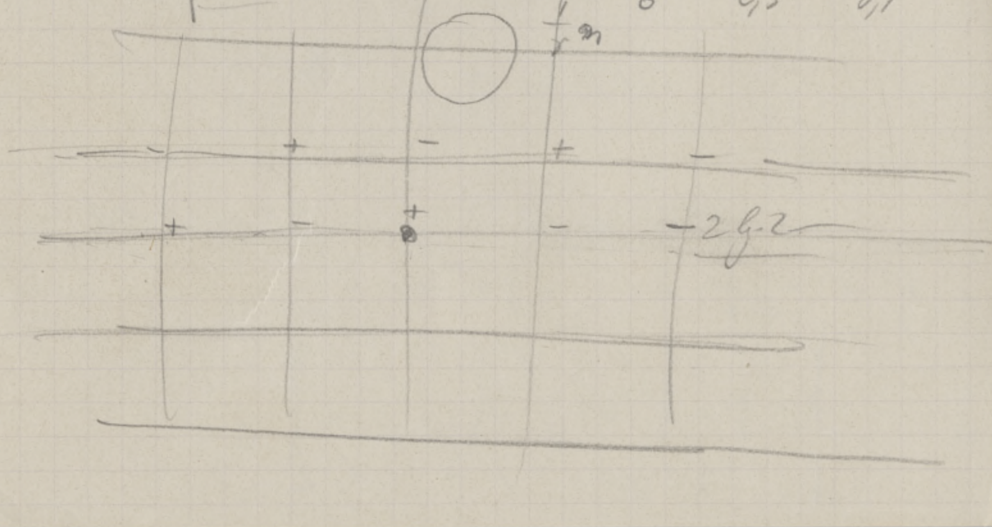
$\Phi = \sum_k S_l \sum_{k'} S_{l'} \varphi_{kk'}^{(l-l')}$



$-\infty \; +\infty$

$\varphi = \varphi_\rho + \varphi_L + \varphi_\varepsilon$

$6 \quad 0{,}5 \quad 0{,}1$



$$e^2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right)$$

$$-e^2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\right)=e^2\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+-\right)$$

$$=e^2\left(\frac{2^2-1^2}{(1.2)^2}+\frac{4^2-3^2}{(3.4)^2}+\cdots\right.$$

$$=e^2\left(\frac{1.3}{(1\cdot 2)^2}+\frac{1.7}{(3.4)^2}+\frac{11}{(5.6)^2}\right.$$

$$=e^2\left(\frac{\cancel{1}.3}{(1.2)^2}+\frac{3}{(3.4)^2}+\frac{3}{(5.6)^2}\right.$$

$$+\frac{4}{(3.4)^2}+\frac{4}{(5.6)^2}$$

$$+\frac{4}{(5.6)^2}$$

$$\frac{e^2}{a^2}=k=-\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{k}{a^n}\qquad \mathcal{E}=-\frac{e^2}{r}+K$$

$$\mathcal{E}=-\frac{e^2}{a}+\frac{e^2}{2a}-\frac{e^2}{3a}+K\qquad \frac{1}{2}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{30}$$

$$\pm\frac{e^2}{a}+\frac{e^2}{2a}+2K$$

$$-\frac{e^2}{a}+K\qquad \frac{e^2}{a}\left[(2n-1)\pm(2n-2)\frac{1}{2}+(2n-3)\frac{1}{3}\right.$$

$$\mathcal{E}=-\frac{e^2}{a}\left(1\pm\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+(2n-2)K$$

$$0=-\frac{e^2}{a^2}2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)-2(n-2)K$$

$$=\cancel{\frac{e^2}{a^2}}\qquad -\frac{e^2}{a}(n-1)+(2n-2)K$$

$$2n-1-\frac{2n}{2}+1+\frac{2n}{3}\pm1\cdots\qquad +2\frac{e^2}{a}\left(\frac{n}{2}-1\right)-2\left(\frac{n}{2}-2\right)K$$

$$-2n\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\;\frac{1}{2n-1}\right)-1+1-1+1\;\frac{}{2n-1}=-\frac{e^2}{a}(n-1)\qquad =-\frac{e^2}{a}(n-1)+(2n-2)K$$

$$+\frac{e^2}{a}(n-2)-(2n-4)K$$

$$0=-\frac{e^2}{a}+2K$$

+ + − −
+ − + −
+ − − +

− − + +
− + − +
− + + −

+ −
− +

+ −
+ + − −
+ − + −
− + − +
− − + +

+ + | + − − −
+ + | − + − −
+ + | − − + −
+ + | − − − +

4

20

+ − | + + − −
+ − + −
+ − − −
− − + +
− + − +
− + + −

6

− +

+ − + − + −

+ + + − − −

6

+ − + − + +

− + + + + −

− − | − + + +

4

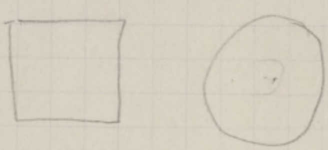
+ − + − + −
+ − − + + −

1

+

−

$$\sum_{0}^{N} \frac{p_n}{n} \qquad \sum_{1} p_n = 0.$$



• ○ • ○ • ○ n Molekülen

$$\mathcal{E} = -\frac{e^2}{a}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots + \frac{1}{2n-1}\Big) + K$$
$$+ 1 - \frac{1}{2} + - \qquad - \frac{1}{2n-2} \quad + K$$
$$+ 1 - + \cdots + \frac{1}{2n-3} \quad + K$$

$$= -\frac{e^2}{a}\Big[(2n-1) - \frac{2n-2}{2} + \frac{2n-3}{3} - + \cdots + \frac{1}{2n-1}\Big] + (2n-1)K$$

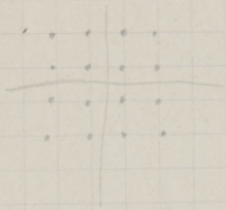
$$= -\frac{e^2}{a}\Big[2n\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - + \cdots \frac{1}{2n-1}\Big) \overbrace{- 1 + 1 - 1 + \cdots}^{(2n-1 \text{ Glieder})}\Big] + (2n-1)K$$

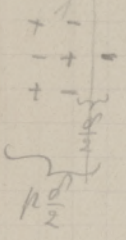
$$= -\frac{e^2}{a}(n-1) + (2n-1)K$$

$$\Theta = \mathcal{E}_n - 2\mathcal{E}_{\frac{n}{2}} = -\frac{e^2}{a}\Big[(n-1) - 2\Big(\frac{n}{2} - 1\Big)\Big] + \Big[(2n-1) - 2(n-1)\Big]K$$

$$= -\frac{e^2}{a}(n - 1 - n + 2) + (2n - 1 - 2n + 2)K$$

$$\Theta = -\frac{e^2}{a} + K$$





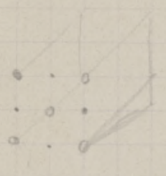
$$\Phi_p = \frac{16\pi e}{\delta} \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{e^{-\sqrt{m^2+n^2}}}{\sqrt{m^2+n^2}} \pi p$$

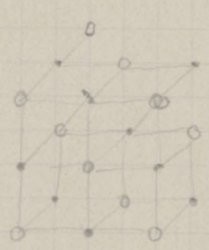
$$p = 1, \quad \Phi_1 = \frac{16\pi e}{\delta} \sum_m \sum_n \frac{e^{-\sqrt{m^2+n^2}}}{\sqrt{m^2+n^2}} \pi$$

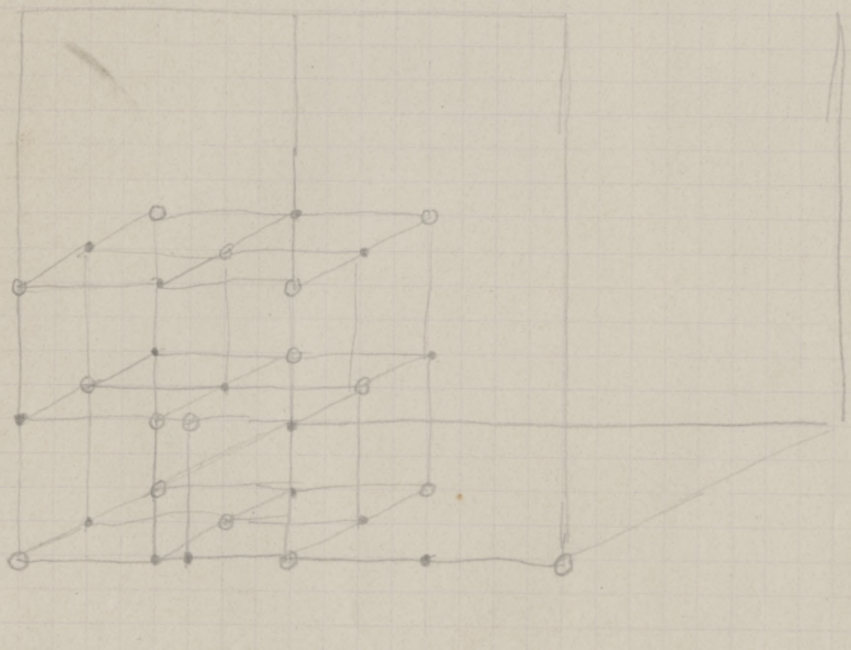
$$m = 0 \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{-n}}{n} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{3e^3} + \cdots$$

$$m = 1 \quad \sum_n$$

+ − + − + −
− + − + − +
+ − + − + −
− + − + − +
+ − + − + −
− + − + − +







Kapillarität.

(1

Potential der xy-Ebene auf den Punkt xyz mit Ladung 1:

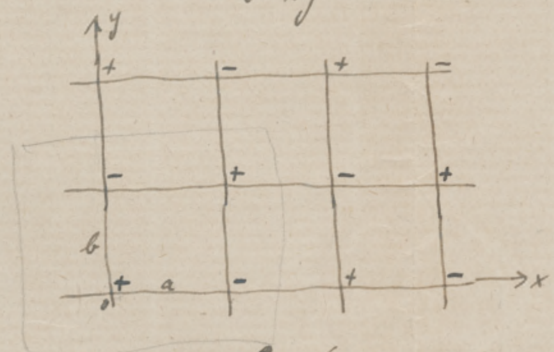
$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2 c_{mn}\pi \frac{e^{-\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}\,|z|}}{\sqrt{\mu_m^2+\nu_n^2}} \cos\mu_m x \cos\nu_n y \;; \qquad \mu_m = \frac{2\pi m}{X}, \quad \nu_n = \frac{2\pi n}{Y}.$$

Periode der Dichte X, Y.

$$c_{00} = \frac{1}{XY}\iint \sigma\, dx\, dy, \quad c_{0n} = \frac{2}{XY}\iint \sigma \cos(\nu_n y)\, dx\, dy, \quad c_{m0} = \frac{2}{XY}\iint \sigma\cos(\mu_m x)\, dx\, dy$$

$$c_{mn} = \frac{4}{XY}\iint_{XY} \sigma \cos(\mu_m x)\cos(\nu_n y)\, dx\, dy.$$

Schachbrett-Netz: (Rechteckig).



$$X = 2a \qquad \mu_m = \frac{\pi m}{a}$$
$$Y = 2b \qquad \nu_n = \frac{\pi n}{b}$$

$$c_{00} = 0\;; \qquad c_{0n} = \frac{e}{2ab}\left(1 - 1 - \cos\pi n + \cos\pi n\right) = 0, \qquad c_{m0} = 0$$

$$c_{mn} = \frac{e}{ab}\left(1 - \cos\pi m - \cos\pi n + \cos\pi m \cos\pi n\right)$$

$$= \frac{e}{ab}\left(1-\cos\pi m\right)\left(1-\cos\pi n\right) \qquad \cos\pi n = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0, 2, 4, \ldots \\ -1 & \text{"} \; n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

$$c_{mn} = \begin{cases} \frac{4e}{ab}, & m, n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also:

$$\phi = \frac{8\pi e}{ab} \sum_{\substack{m=1 \\ m\,n \text{ unger.}}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}\,\pi|z|}}{\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}} \cos\frac{\pi m}{a}x \cos\frac{\pi n}{b}y.$$

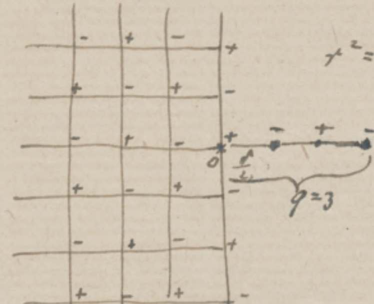
Quadratisches Gitter $a = b = \frac{\delta}{2}$. $x = 0$, $y = 0$; $z = p\frac{\delta}{2}$.

$$\phi_p = \frac{16\pi e}{\delta} \sum_{\substack{m=1 \\ m\,n \text{ unger.}}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{m^2+n^2}\cdot\pi p}}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

Elementarpotential zwischen 2 Atomen:

$k = 1: +$
$k = 2: -$

$$\varphi_{kk'} = \pm\frac{e}{r} + \frac{b_{kk'}}{r^n}$$



$$r^2 = \frac{\delta}{2}\left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\right)$$

Potential auf einen äußeren Punkt $k = 1$, $q\cdot\frac{\delta}{2}$:

$$\varphi_{1q} = \mathop{S}_{l=1}^{\infty} \sum_{k'} \varphi_{1k'}^{(l)} = \sum_{p=1}^{\infty} \phi_{p+q} + b_{11}\, s_2'\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\frac{n}{2}} + b_{12}\, s_1'\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\frac{n}{2}},$$

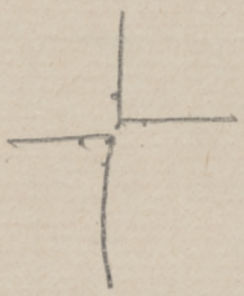
$q = 1, \ldots \infty$

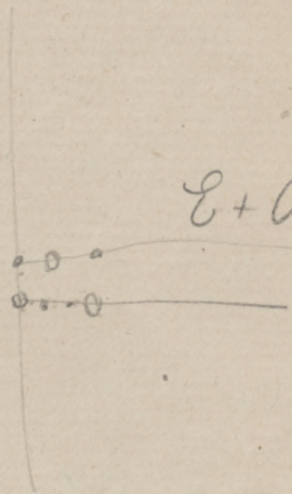
$$s_1'(q) = \mathop{S}_{\substack{l_1+l_2+l_3 \text{ ungerade} \\ -\infty < l_2, l_3 < +\infty \\ l_1 = 2q \text{ bis } \infty}} \left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\right)^{-\frac{n}{2}}, \qquad s_2'(q) = \mathop{S}_{\substack{l_1+l_2+l_3 \text{ gerade} \\ -\infty < l_{2,3} < \infty \\ l_1 = 2q \text{ bis } \infty}} \left(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\right)^{-\frac{n}{2}}$$

$$\mathcal{E} + \cancel{\theta + K} = \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22} + \mathcal{E}_{33} + \mathcal{E}_{44}$$

$$\cancel{+ 2\,\mathcal{E}_{12} + 2\,\mathcal{E}_{13}}$$

$$\cancel{\mathcal{E} + O + K} \Big(+ \cancel{\mathcal{E}_{12}} + \mathcal{E}_{13} + \cancel{\mathcal{E}_{14}} + \cancel{\mathcal{E}_{23}} + \mathcal{E}_{24} + \cancel{\mathcal{E}_{34}}$$





$$\mathcal{E} + O + K = \mathcal{E}_{11} + \mathcal{E}_{22} + - \; -$$

Oktaederfläche. $X = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$, $Y = \delta\sqrt{\frac{3}{2}}$; Ebenenabstand $Z = \delta\frac{\sqrt{3}}{6}$

1. Ebene: + $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$x = \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$, $y = \frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $z = 0$

2. Ebene: − $x = 0$, $y = \frac{\delta}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $z = \delta\frac{\sqrt{3}}{6}$

$x = \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$, $y = \frac{5\delta}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $z = \delta\frac{\sqrt{3}}{6}$

3. Ebene: + $x = \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$, $y = \frac{\delta}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $z = 2\delta\frac{\sqrt{3}}{6}$

$x = 0$, $y = \frac{2\delta}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $z = 2\delta\frac{\sqrt{3}}{6}$

4. Ebene. − $x = 0$, $y = 0$, $z = 3\delta\frac{\sqrt{3}}{}$

$x = \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$, $y = \frac{\delta}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, $z = 3\delta\frac{\sqrt{3}}{6}$

$$\mu = \frac{2\pi m}{X} = \frac{2\pi\cdot\sqrt{2}}{\delta}m,$$

$$\nu = \frac{2\pi n}{Y} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\delta\sqrt{3}}n,$$

Sei: $x_0 = \frac{\delta}{2\sqrt{2}}$; $y_0 = \frac{\delta}{6}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$$\cos\mu x_0 = \cos\pi m = \begin{cases} 1 & m \text{ gerade} \\ -1 & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\cos\nu y_0 = \cos\frac{\pi n}{3} = \begin{cases} 1 & n \equiv 0 \mod 6 \\ \frac{1}{2} & n \equiv \pm 1 \\ -\frac{1}{2} & n \equiv \pm 2 \\ -1 & n \equiv 3 \end{cases}$$

Potential einer Ebene. $$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} 2c_{mn}\pi\frac{e^{-\sqrt{\mu^2+\nu^2}\,z}}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}\cos\mu x\cos\nu y$$

$$c_{00} = \frac{1}{XY}\iint\sigma\,dx\,dy = \frac{2}{\delta^2\sqrt{3}}\cdot 2$$

$$c_{0n} = \frac{4}{\delta^2\sqrt{3}}\left(1 + \cos\pi n\right) = \begin{cases} \frac{8}{\delta^2\sqrt{3}}, & n \text{ gerade} \\ 0, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$c_{m0} = \frac{4}{\delta^2\sqrt{3}}\left(1 + \cos\pi m\right) = \begin{cases} \frac{8}{\delta^2\sqrt{3}}, & m \text{ gerade} \\ 0, & m \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$c_{mn} = \frac{8}{\delta^2\sqrt{3}}\left(1 + \cos m\pi\cos n\pi\right) = \begin{cases} \frac{16}{\delta^2\sqrt{3}}, & m, n \text{ gerade oder } m, n \text{ ungerade} \\ 0, & m \text{ gerade, } n \text{ ungerade, oder } m \text{ ungerade, } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{m\,\text{ger.}}\frac{8}{\delta\sqrt{6}\,m}e^{-\frac{2\pi\sqrt{2}}{\delta}mz}\cos\frac{2\pi\sqrt{2}}{\delta}mx + \sum_{n\,\text{ger.}}\frac{8}{\delta\sqrt{2}\,n}e^{-\frac{2\pi\sqrt{2}}{\delta\sqrt{3}}nz}\cos\frac{2\pi\sqrt{2}}{\delta\sqrt{3}}ny$$

$$+ \sum_{m}\sum_{n}\frac{16}{\delta\sqrt{2}\sqrt{3m^2+n^2}}e^{-\frac{2\pi\sqrt{2}}{\delta\sqrt{3}}\sqrt{3m^2+n^2}\,z}\cos\frac{2\pi\sqrt{2}}{\delta}mx\cos\frac{2\pi\sqrt{2}}{\delta\sqrt{3}}ny$$

m, n beide ger. oder beide ung.

Potential der Ebene 1 auf 1. Punkt der Ebene 2:

$$\varphi_{11} = \varphi_0 + \sum_{m\,\text{ger.}} \frac{8}{\delta\sqrt{6}\,m} e^{-\frac{\pi\sqrt{6}}{3}m} + \sum_{n\,\text{ger.}} \frac{8}{\delta\sqrt{2}\,n} e^{-\frac{\pi\sqrt{2}}{3}n} \cos\frac{2\pi n}{3}$$

$$+ \sum_{m}\sum_{n}{}_{m,n\,\text{g.o.u.}} \frac{16}{\delta\sqrt{2}\sqrt{3m^2+n^2}} e^{-\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\sqrt{3m^2+n^2}} \cos\frac{2\pi n}{3}$$

Potential der Ebene 1 auf 2. Punkt der Ebene 2:

$$\varphi_{12} = \varphi_0 + \sum_{m\,\text{ger.}} \frac{8}{\delta\sqrt{6}\,m} e^{-\frac{\pi\sqrt{6}}{3}m} \cos m\pi + \sum_{n\,\text{ger.}} \frac{8}{\delta\sqrt{2}\,n} e^{-\frac{\pi\sqrt{2}}{3}n} \cos\frac{5\pi n}{3}$$

$$+ \sum_{m}\sum_{n}{}_{m,n\,\text{g.o.u.}} \frac{16}{\delta\sqrt{2}\sqrt{3m^2+n^2}} e^{-\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\sqrt{3m^2+n^2}} \cos m\pi \cos\frac{5\pi n}{3}$$

~~Es ist $\varphi_{11} = \varphi_{12} = \varphi_1$, und~~ ~~Bildet man $\varphi_1 = \varphi_{11}+\varphi_{12}$, so heben sich in der Doppelsumme die Glieder (m, n ungerade) fort.~~

$$\cancel{\varphi_1 = \varphi_{00} + \frac{8}{\delta\sqrt{2}}\Big\{\sum_{m\,\text{ger.}} \frac{1}{\sqrt{3}m} e^{-\frac{\pi\sqrt{6}}{2}m} + \sum}$$

$$\varphi_1 - 2\varphi_0 = 2\cdot\frac{8}{\delta\sqrt{6}}\left\{\frac{1}{2}e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{6}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{6}} + \frac{1}{6}e^{-2\pi\sqrt{6}} + \cdots\cdots\right\}$$

$$+2\cdot\frac{8}{\delta\sqrt{2}}\left\{-\frac{1}{4}e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{2}} - \frac{1}{8}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{6}e^{-2\pi\sqrt{2}} - \frac{1}{16}e^{-\frac{8\pi}{3}\sqrt{2}} - \cdots\right\}$$

$$+2\cdot\frac{16}{\delta\sqrt{2}}\left\{-\frac{1}{8}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{7}}e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{14}} - \frac{1}{4\sqrt{13}}e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{26}} + \cdots\right\}$$

$$-2\frac{16}{\sqrt{2}\,\delta}\left\{\frac{1}{4}e^{-\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{6}} + \frac{1}{4\sqrt{7}}e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{14}} + \cdots\right\}$$

Oder:

$$\varphi_1 - 2\varphi_0 = -\frac{4}{\delta\sqrt{2}}\left\{3e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{3}}e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{6}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{7}}e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{14}} + \cdots\right\}$$

$$\cancel{-\frac{2}{3}e^{-2\pi\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{13}}e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{26}} + \cdots}\Big\}$$

Potential der Ebene 1 auf 1. Punkt der Ebene 3:

$$\varphi_{21} = \varphi_0 + \sum_{m\,\text{ger.}} \frac{8}{\delta\sqrt{6}\,m}\, e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{6}\,m} \cos m\pi + \sum_{n\,\text{ger.}} \frac{8}{\delta\sqrt{2}\,n}\, e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{2}\,n} \cos\frac{n\pi}{3}$$

$$+ \sum_{\substack{m \\ m,n\ \text{g.o.u.}}}\sum_{n} \frac{16}{\delta\sqrt{2}\sqrt{3m^2+n^2}}\, e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{2}\sqrt{3m^2+n^2}} \cos m\pi \cos\frac{n\pi}{3}$$

Potential der Ebene 1 auf 2. Punkt der Ebene 3:

$$\varphi_{22} = \varphi_0 + \sum_{m\,\text{ger.}} \frac{8}{\delta\sqrt{6}\,m}\, e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{6}\,m} + \sum_{n\,\text{ger.}} \frac{8}{\delta\sqrt{2}\,n}\, e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{2}\,n} \cos\frac{4\pi n}{3}$$

$$+ \sum_{\substack{m \\ m,n\ \text{g.o.u.}}}\sum_{n} \frac{16}{\delta\sqrt{2}\sqrt{3m^2+n^2}}\, e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3m^2+n^2}} \cos\frac{4\pi n}{3}$$

Also:

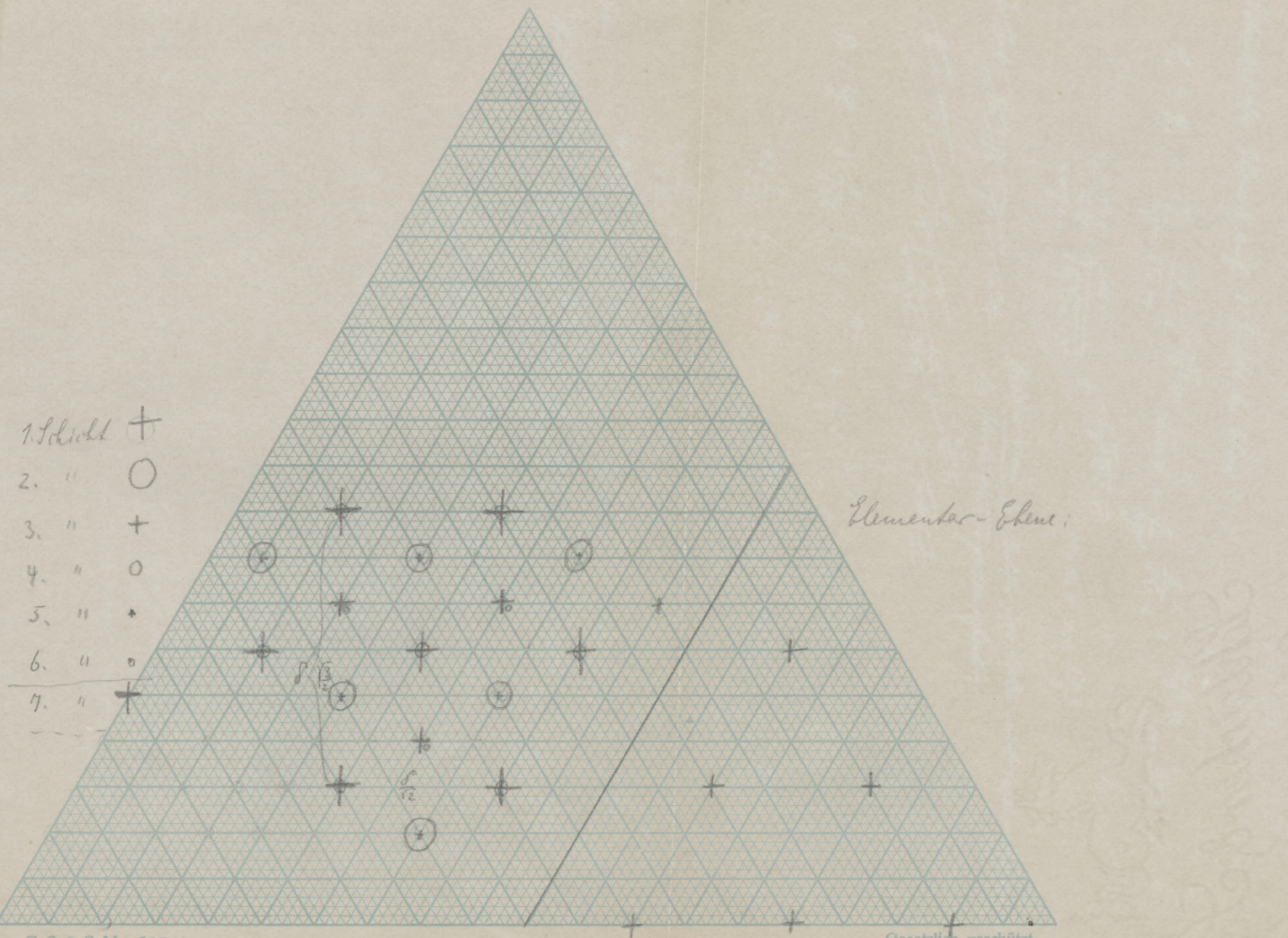
$$\varphi_2 - 2\varphi_0 = 2\,\frac{8}{\sqrt{6}\,\delta}\left\{\frac{1}{2}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{6}} + \frac{1}{4}e^{-\frac{8\pi}{3}\sqrt{6}} + \cdots\right\}$$

$$+ 2\,\frac{8}{\sqrt{2}\,\delta}\left\{-\frac{1}{4}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{2}} - \frac{1}{8}e^{-\frac{8\pi}{3}\sqrt{2}} + \frac{1}{6}e^{-4\pi\sqrt{2}} - \cdots\right\}$$

$$+ 2\,\frac{16}{\delta\sqrt{2}}\left\{-\frac{1}{8}e^{-\frac{8\pi}{3}\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{7}}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{14}} - \cdots\cdots\right\}$$

$$-2\cdot\frac{16}{\delta\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{4}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{6}} + \frac{1}{4\sqrt{7}}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{14}} + \cdots\right\}$$

$$\varphi_2 - 2\varphi_0 = -\frac{4}{\delta\sqrt{2}}\left\{3e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{3}}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{6}} + \frac{3}{2}e^{-\frac{8\pi}{3}\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{7}}e^{-\frac{4\pi}{3}\sqrt{14}} + \cdots\right\}$$



C. S. & S. No. 315 1/2

Gesetzlich geschützt.